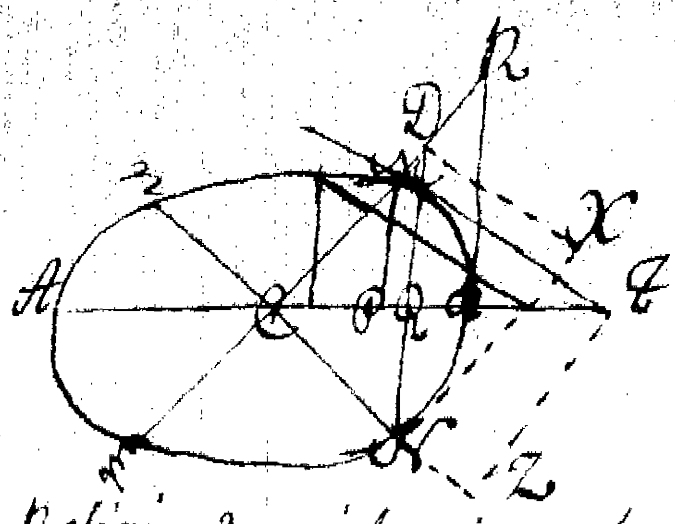
BAILS, Benito

Principios de matemática de la Real Academia de San Fernando / por Don Benito Bails ; tomo II. -- Tercera edicion, corregida. -- Madrid : En la Imprenta de la Viuda de D. Joaquin Ibarra, 1797

[2], VI, [2], 464 p., [11] h. de lám. pleg., a5, A-Z8, 2A-2F8 ; 4º

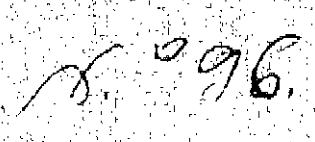
Marca de imp. en port. -- Las h. de lám. pleg. son calc.

1. Matemáticas-Tratados, manuales, etc. 2. Matematikak-Tratatuak, eskuliburuak, etab. I. Título



Refiriendose á la misma figura del Libro despues de preparada como aqui y tratando de demostrar la igualdad en superficie de los triangulos NCD = CMT.

Los triangulos semejantes CPM y CQD dan CM : CD :: CP : CQ. Y los CQN, PMT dan CN : MT :: CQ : PT pero CP : CQ :: CQ : PT p.r que de la espresion de la subtangente $PT = \frac{a^2-x^2}{x}$ se saca CP : PA :: Pa : PT y de $(CQ)^2 =$ AP×Pa CQ : PA :: Pa : CQ Luego CP : CQ :: CQ : PT de consiguiente CM : CD :: CN : MT p.r lo tanto los paralelo-gramos CDXN y CMTZ que tienen el angulo C comun y los lados que le comprenden reciprocamente proporcionales son iguales y los triangulos CND y CMT que son sus mitades tambien lo seran,


N.° 96.



Barraycua.

PRINCIPIOS DE MATEMÁTICA DE LA REAL ACADEMIA DE SAN FERNANDO

POR DON BENITO BAILS.

TERCERA EDICION, CORREGIDA.

TOMO II.





MADRID. MDCCLXXXVII.

EN LA IMPRENTA DE LA VIUDA DE D. JOAQUIN IBARRA.

PROLOGO.

Por ser el objeto de la Matemática averiguar las propiedades y relaciones de las cantidades, las considera de un modo indeterminado ó general, á fin de cifrar en la expresion de un caso solo una infinidad de casos particulares. El medio mas adequado para lograr su intento es el Algebra, en la qual concurren todas las indeterminaciones conocidas, es á saber, la específica y la numérica; es por consiguiente el Algebra la lengua mas general que conocemos. Las letras del abecedario con que esta ciencia expresa las cantidades, no representan por sí ni cosas, ni su número, quando los guarismos, bien que no representan por sí cosas señaladas, señalan invariablemente su número; la letra *a* v. gr. por sí no representa ni

 hom-

hombres, ni árboles, &c. ni quatro, ni veinte, &c. quando el guarismo 4, v. gr. bien que de suyo no representa ni hombres, ni árboles, representa ya quatro cosas, sean las que fueren, y no puede representar ni mas ni menos.

Declarados ya en el tomo antecedente los principios fundamentales de la Arismética y Geometría, dos ramos que con el Algebra componen todos los medios que ha discurrido el entendimiento humano para salir ayroso de sus empeños matemáticos, me tocaba declarar aquí los del Algebra. Declárolos con efecto, pero los aplico á mayor número de asuntos y cuestiones que no en la primera edicion de estos Principios, donde, atendidas las miras con que escribo, confieso que me quedé muy corto, cortísimo. Diestro algebrista, diestro calculador, diestro matemático son el dia de hoy expresio-

nes

nes sinónimas; matemático docto es aquel que tiene en la memoria mas fórmulas ó expresiones generales, esto es, de aquellas que encierran la resolucion de una infinidad de cuestiones particulares. A los que con la circunstancia de ser diestros calculadores juntan el tino de la investigacion, los graduamos de grandes matemáticos; hombres privilegiados, de talento portentoso, los quales dilatando los límites de la ciencia, dexan arrebatados de admiracion á los que nos arrojamos á seguir sus huellas desde una distancia infinita de la altura donde los vemos encumbrados.

INDICE

DEL TOMO II.

ERRATAS.

Pag.	Linea.	Dice.	Lease.
11	21	$-3ab^2c^4$ . . .	$-3ab^5c^4$.
17	20	$-a^2b^3$	$-ab^3$.
37	15	$x+y-a$ . . .	$x+y=a$.
52	17	la primer $4a$ . .	$3a$.
57	30	$\frac{px}{m}$	$\frac{nx}{m}$.
83	16	{despues de dias empiecese . .} . .	*B,C,D en 12 dias.*
143	id.	$+y$	$+y^2$.
153	últ.	$+\sqrt{(\frac{b^2}{2}}$ . . .	$+\sqrt{(\frac{b^2}{4}}$.
172	9	$-b^2+c^2$ . . .	$+b^2-c^2$.
201	29	$+2ay$	$-2ay$.
209	28	*EPM*	*FPM.*
210	29	*CF*	*GF.*
214	14	$y^2 \pm u$	$y^2 = u$.
Idem	id.	$= x$	$= u$.
216	27	$d = \frac{4cx}{4ax}$ . . .	$d = \frac{4cx}{4a}$.
219	18	*ϒF+ϒF* . . .	*ϒF+ϒf.*
302	14	-4	$+4$.
331	15	$3x^3dx$	$3x^2dx$.
334	23	$\times \frac{xdx}{a^2+x^2}$ . . .	$= \frac{xdx}{a^2+x^2}$.
335	19	$\frac{2dx^3}{x^3}$	$\frac{2dx^3}{x^3}$.
338	29	$= \frac{-a.^2 \cot. u}{\cot.^2 u}$ . .	$= \frac{-a.^2 d \cot u}{\cot.^2 u}$.

Pag.

Pag.	Linea.	Dice.	Lease.
339	18	$=\frac{-du}{\text{sen } u}$	$=\frac{-du}{\text{sen}^2 u}$.
347	14	$\frac{y}{\frac{1}{2}a-x}$	$\frac{y}{\frac{1}{2}a-x}$.
360	6	$=3c$	$=4c$.
373	15	6 *f*	6 ʃ
379	8	$=\left(\frac{n-a}{b}\right)^{\frac{p}{n}}$ . .	$=\left(\frac{u-a}{k}\right)^{\frac{p}{n}}$.
Idem	9	$(u-a)^{\frac{1-n}{u}}$ . . .	$(u-a)^{\frac{1-n}{n}}$.
385	11	$=-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{a}$	$=\frac{-l(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{a}$.
418	22	$y^2=\frac{b}{a}(a^2-x^2)$	$y=\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$.
425	31	$\frac{q}{2r}$	$\frac{c}{2r}$.
Idem	id.	$\left(a^3\,\frac{(x+a)}{x}\right)$ . . .	$\left(a^3\,\frac{(x-a)}{x}\right)$.
433	2	periferica . . .	*periferia.*
454	20	$\sqrt{(\text{sen}.b \times \text{sen}.b)}$	$\sqrt{(\text{sen}.b \times \text{sen}.c)}$.
Idem	21	sen $\frac{1}{2}$ ángulo . .	cos $\frac{1}{2}$ *ángulo.*

PRINCIPIOS
DE ÁLGEBRA.

1 EL asunto de la ciencia que llamamos *Algebra*, es dar medios para reducir á reglas generales la resolucion de todas las cuestiones que pueden ofrecerse acerca de las cantidades. Para que sean generales estas reglas, es preciso que no pendan de los valores de las cantidades que se consideran, sí de la naturaleza de cada cuestion; y han de ser siempre unas mismas para todas las cuestiones de una misma especie.

Debe, pues, representar el Algebra las cantidades con caracteres y signos distintos de los que usa la Arismética. Es evidente que, quando por las reglas que ésta enseña, llegamos á una conclusion, á un resultado, ó al último término de una operacion, nada vemos que recuerde á nuestro entendimiento el camino por donde ha llegado al fin que se propuso. Si despues de executadas una ó muchas operaciones de Arismética hallo 12, nada veo en 12 que me diga, si este número proviene de la multiplicacion de 3 por 4, ó de 2 por 6, ó de la adicion de 5 con 7, ó de 2 con 10, ó en general de otra combinacion qualquiera de operaciones. La Arismética dá reglas para hallar ciertos resultados; pero estos resultados no pueden dar reglas. El Álgebra dá uno y otro; da resultados, y estos resultados suministran reglas; y lo consigue, expresando las cantidades con signos generales que son las letras del abecedario: y como no tienen estas letras mas relacion con un número que con otro, nada representan; y si algo representan, solo representan lo que uno quiere. En estos signos, que permanecen á la vis-

ta en todo el discurso del cálculo, se quedan estampadas, digámoslo así, las operaciones por donde han pasado, ó por lo menos dexan en los resultados de estas operaciones vestigios muy señalados del camino que se debe seguir para llegar al mismo término por los medios mas sencillos.

No solo expresa el Algebra las cantidades con signos generales, mas tambien expresa como están las unas respecto de las otras, y las diferentes operaciones que con ellas se han de executar: en una palabra, todo es representacion; y quando decimos que hacemos una operacion, damos una nueva forma á una cantidad.

Signos de que usa el Algebra.

2 Ademas de expresar el Algebra las cantidades con las letras del abecedario, usa signos particulares, cuya significacion dimos ya á conocer en otra parte, y repetirémos aquí.

El signo + significa *mas*; $a+b$ se lee *a mas b*, y quiere decir que se suma la cantidad b con la cantidad a, por cuyo motivo + señala una adicion.

3 El signo — significa *menos*, y quando está entre dos cantidades como $a-b$, significa que la segunda se resta de la primera, ó que b se debe considerar al reves de a; por lo que, — señala una sustraccion.

4 Quando una cantidad no lleva signo alguno, se supone que lleva el signo +, y es uso comun omitirle en la primera cantidad de toda expresion algebráica. Así, en lugar de $+a+b$, se escribe $a+b$; $+a-b$ es lo propio que $a-b$.

5 El signo × significa *multiplicado por*. Así, $a\times b$ significa la multiplicacion de a por b. Un punto entre dos cantidades significa tambien la multiplicacion de una por otra. Lo propio es $a\,.\,b$ que $a\times b$. Tambien se señala la multiplicacion de dos cantidades una por otra escribiéndolas juntas sin el signo ×, y sin punto en-

entre ellas; lo mismo es ab que $a \cdot b$, ó $a\times b$.

Quando se ha de multiplicar una cantidad que consta de varias partes separadas con los signos + y — por otra cantidad, bien sea simple, ó bien compuesta, se encierran dentro de un paréntesis todas las partes que han de formar una cantidad; y con esto se consideran todas juntas como una cantidad simple que se ha de multiplicar por otra cantidad simple. Así, $(a+b-d)\times g$ significa que la cantidad $(a+b-d)$ la qual se considera como que forma una sola cantidad, está multiplicada por la cantidad g. Asimismo $(a+b-d)\times(g+b-k)$ significa que las dos cantidades $(a+b-d)$, $(g+b-k)$ consideradas como si fuera cada una una cantidad simple, están multiplicadas una por otra. Estas mismas multiplicaciones se señalan tambien de otro modo: en lugar de $(a+b-d)\times g$ se escribe $(a+b-d).g$, ó $\overline{a+b-d}\times g$, ó $\overline{a+b-d}\,.\,g$. Lo propio es $(a+b-d)\times(g+b-k)$ que $(a+b-d).(g+b-k)$, ó $\overline{a+b-d}\times\overline{g+b-k}$, ó $\overline{a+b-d}\,.\,\overline{g+b-k}$. Pero para escusar equivocaciones, es mejor encerrar las cantidades compuestas dentro de paréntesis, que no señalarlas con rayas por encima.

6 El signo = quiere decir *es igual á*, y sirve para señalar que una cantidad es igual con otra. Así, $a=b$ significa *a es igual á b*.

7 Este signo $>$ ó $<$ puesto entre dos cantidades significa que la que está ácia la boca de dicho signo, es la mayor; ó sino, que la que está ácia la punta del signo es la menor. $a>b$ quiere decir que *a es mayor que b*, ó lo que es lo propio, *b es menor que a*. Asimismo, $a<b$ quiere decir *a menor que b*, ó lo que es lo mismo, *b mayor que a*.

8 Llámase cantidad *simple* ó *monomia* toda cantidad que consta de una parte no mas ó de solo un *término*, ó antes de la qual no hay mas que un solo sig-

no suplido ó expreso. Así, a es un monomio; $-b$ es otro monomio. Tambien es un monomio el producto de varias cantidades simples, como abc producto de los tres factores a, b, c; porque dicho producto se considera como que no compone mas de un término.

9 Llámanse *dimensiones* de un monomio las letras que le componen; cada una de sus letras es una dimension particular. Por esta razon, a es un monomio de una sola dimension; ab es un monomio de dos; abc es un monomio de tres dimensiones &c.

10 Como, por lo enseñado en la Arismética, el quadrado de una cantidad es el producto de dicha cantidad multiplicada *una vez* por ella misma, y el cubo es el producto de la cantidad multiplicada *dos veces* por ella misma, y así prosiguiendo; es claro que el número de las dimensiones del quadrado, ó del cubo, ó de la quarta potencia &c. es duplo, ó triplo, ó quadruplo &c. del que señala las dimensiones de la raiz. Porque el quadrado de la cantidad a v. gr. que tiene una dimension, es $a \times a$ ó aa que consta de dos dimensiones; el cubo de la misma cantidad a es $a \times a \times a$ ó aaa que tiene tres dimensiones; la quarta potencia de a que es $a \times a \times a \times a$ ó $aaaa$ consta de quatro dimensiones; &c.

11 Toda cantidad que se compone de varios términos separados unos de otros con los signos $+$ y $-$, se llama cantidad *complexa* ó *polynomia*. Así, $a + b + c - d$ es un polynomio. Bien se echa de ver que un polynomio es lo mismo que el agregado de muchos monomios.

12 Un polynomio es *homogeneo* quando todos sus términos tienen un mismo número de dimensiones. El polynomio $a + b - c$ es homogeneo, porque cada uno de sus términos tiene una dimension.

13 Las cantidades que se comparan unas con otras en un mismo cálculo, ó forman el resultado

de algunas operaciones, siempre son homogeneas, quiero decir, siempre tienen en todos sus términos explícita, ó implícitamente un mismo número de dimensiones. Porque solo podemos comparar unas con otras las cantidades de una misma naturaleza, y cada letra de las que entran en un término de un polynomio, tiene por precision una letra que le corresponde en otro término.

14 Aunque las cantidades de que consta un mismo polynomio, sean siempre de un mismo género, por quanto todas ellas tienen un mismo número de dimensiones tácitas ó expresas, por otra parte pueden ser opuestas unas á otras en quanto al modo con que exîsten; y para señalar esta oposicion, se distinguen en general dichas cantidades en cantidades *positivas*, y cantidades *negativas*.

La naturaleza de estas cantidades quedó muy declarada en otro lugar; y allí mismo manifestamos que las cantidades positivas se señalan con el signo +, y las negativas con el signo —.

De lo dicho allí tambien se saca que esta expresion $+a, -a$, es siempre 0 ó nada, y que para entender estotra $+a-b$ hay dos casos que considerar.

1.° Quando a es mayor que b, se resta b de a, y la resta, que expresa el valor que se busca, llevará el signo +.

2.° Quando a es menor que b, entonces se resta a de b, y se tomará la resta negativa, dándole el signo —, y este será el valor de la expresion.

Adicion de las cantidades algebráicas.

15 Sumar varias cantidades es lo propio que juntarlas, ó ponerlas juntas con los mismos signos que llevan. Así, sumar varios caudales es hacer otro mayor; sumar varias deudas es componer una deuda

mayor; sumar caudales con deudas es sacar el exceso que los caudales llevan á las deudas, ó estas á aquellos, conforme fueren los caudales mayores que la deuda, ó la deuda mayor que los caudales.

16 Por esto se dexa conocer que *sumar* no siempre significa en Algebra lo mismo que *aumentar*. Quando se suman caudales con caudales, es cierto que estos se aumentan; asímismo, quando se suma una deuda con otra se hace mayor la deuda. Pero quando los caudales se suman con la deuda, en realidad se *disminuye* una de las dos cantidades.

17 Luego *para sumar varios monomios, se deben escribir unos á continuacion de otros con los mismos signos* + *y* — *que llevan.* Si al fin del cálculo la suma de las cantidades positivas sale mayor que la de las cantidades negativas, es señal de que hay en ella mas caudal que deudas; y por el contrario, habrá en la suma mas deudas que caudal, quando la suma de las cantidades negativas salga mayor que la de las cantidades positivas.

Si se ofreciera sumar v. gr. estos quatro monomios $+a$, $+b$, $-c$, $+d$; escribiríamos $+a+b-c+d$, ó si no $a+b-c+d$, omitiendo el signo + de la primera cantidad de la suma.

18 La adicion de los polynomios se funda en la de los monomios; porque es evidente que como un todo es igual á la suma de todas sus partes juntas, se sacará la suma de varios polynomios, juntando unos con otros todos los términos de que se componen, y dándoles los mismos signos que llevan.

V. gr. la suma de los tres polynomios.

$$\begin{array}{c} a+b-c \\ g-h-k \\ m+n-p \\ \hline \end{array}$$

es $a+b-c+g-h-k+m+n-p$ suma.

La

La suma de los quatro polynomios.

$$a+b+c-d$$
$$b-f+g+a$$
$$c+e-b+g$$
$$b+c+n-d$$

es $a+b+c-d+b-f+g+a+c+e-b+g+b+c+n-d$ suma.

19 (Quando en una suma se encuentran algunos términos *semejantes*, esto es, algunos términos que llevan una misma letra, si los términos son de una dimension no mas; ó unas mismas letras, quando son de muchas dimensiones; en tal caso, en vez de escribir muchas veces aquel mismo término, se escribe una vez no mas, pero poniendo antes de él un guarismo que señala el número de veces que se ha de repetir aquel término, y esto se llama *reducir.*) Así, en el exemplo antecedente en lugar de $a+a$, pondré $2a$; en lugar de $+b+b-b$, pondré $+b$ no mas, porque al uno de los caudales $+b$ le destruye la deuda $-b$, y por consiguiente el total $+b+b-b$ es $+b$ no mas; en lugar de $+c+c+c$, escribiré $+3c$; en lugar de $-d-d$, pondré $-2d$; y finalmente: en lugar de $+g+g$, escribiré $+2g$. En virtud de estas reducciones, se queda la suma en $2a+b+3c-2d-f+2g+e+b+n$.

(El número que se pone antes de una cantidad para expresar el número de veces que se ha de tomar positiva ó negativamente, se llama su *coeficiente.*

Quando una cantidad no lleva coeficiente alguno, se considera que la unidad es su coeficiente. Lo propio es a que $1a$; ab es lo mismo que $1ab$.

Sustraccion de las cantidades algebráicas.

20 Restar una cantidad de otra es tomar la pri-

mera al reves de como es en sí. Así, quitar caudal es lo propio que contraer deudas; quitar deudas es lo mismo que adquirir caudal.

21 Se echa, pues, de ver que *restar* no siempre es *disminuir*. Quando se restan caudales de caudales, no hay duda en que se disminuyen estos; pero quando de los caudales resto una deuda, *aumento realmente* el caudal; porque si á un hombre se le quita una deuda, se le hace mas rico en todo lo que montaba la deuda.

22 Luego *para restar un monomio de otra cantidad qualquiera, se le ha de trocar á dicho monomio el signo + ó — que lleve, escribiéndole despues á continuacion de la cantidad propuesta.*

El resultado representará caudal, ó deudas, conforme fuere, ó positivo ó negativo.)

Si de $a+b$ se resta v. gr. el monomio $+c$, el residuo será $a+b-c$.

Si de la cantidad $a+b$ se resta el monomio $-c$, quedará la resta $a+b+c$.

23 (La sustraccion de los polynomios se executa mudando los signos de todos los términos de la cantidad por restar. Si en el resultado salen términos semejantes, se hace la reduccion del mismo modo puntualmente que se dixo en la adicion.)

V. gr. si de. . . . . . $6a-4b+5c$
resto. . . . . $4a-6b+9c$

residuo $6a-4b+5c-4a+6b-9c$, ó, reduciendo, $2a+2b-4c$.

Multiplicacion de las cantidades algebráicas.

24 (Multiplicar una cantidad por otra es tomar la primera tantas veces como unidades hay en la se-

gun-

gunda, y, ademas de esto, tomarla del mismo modo que la segunda; quiero decir, sumarla ó tomarla con sus signos conforme fueren, si el multiplicador fuere positivo, ó restarla, y por consiguiente mudar sus signos, si el multiplicador fuere negativo. Todo esto es una consecuencia palpable de la naturaleza de la adicion y de la sustraccion, qual la hemos declarado.

Luego 1.° si el multiplicando y el multiplicador fueren positivos, el producto será positivo; porque caudales sumados cierto número de veces unos con otros, forzosamente han de producir caudales. Así, $+a \times +b$ dá $+ab$. Esta regla se expresa generalmente de este modo: $+ \times +$ dá $+$.

2.° Si el multiplicando es negativo, y el multiplicador positivo, el producto será negativo; porque una deuda sumada cierto número de veces con ella misma, por precision ha de producir una deuda. Por esta razon, $-a \times +b$ dá $-ab$. Esta regla se expresa de un modo general diciendo: $- \times +$ dá $-$.

3.° Quando el multiplicando fuere positivo y el multiplicador negativo, el producto será negativo; porque una cosa que se le quita á un hombre cierto número de veces, le pone en el mismo estado que una deuda del mismo valor, y por consiguiente estos dos efectos se han de señalar con un mismo signo $-$. Esta regla se expresa en general de este modo: $+ \times -$ dá $-$.

4.° Si el multiplicando y el multiplicador fueren ambos negativos, el producto será positivo; porque si á un hombre se le quita una deuda cierto número de veces, hará esto para él el mismo efecto que si se le diera una cosa del mismo valor, y por consiguiente estos dos efectos se han de señalar con el mismo caracter $+$. La expresion general de esta regla es que $- \times -$ dá $+$.

25 La primera operacion que hemos de executar,

y de la qual penden todas las demas, es multiplicar un monomio por otro. Esto se consigue escribiendo primero el signo que ha de preceder al producto con arreglo á la regla sentada (24), y despues unas á continuacion de otras todas las letras de que se componen los dos factores de la multiplicacion. Para multiplicar v. gr. $+a$ por $+b$, escribirémos $+ab$; para multiplicar $+ab$ por $-c$, escribirémos $-abc$; para multiplicar $-abc$ por $+de$, se pondrá $-abcde$; y para multiplicar $-gh$ por $-mn$, se pondrá $+ghmn$.

26 Quando los dos monomios por multiplicar tienen coeficientes distintos de la unidad, despues de puesto el signo que ha de llevar el producto, se multiplicarán uno por otro los coeficientes por las reglas de la Arismética, y despues se pondrán las cantidades literales unas á continuacion de otras. Para multiplicar v. gr. $+3a$ por $-5b$, escribirémos $-15ab$. Asímismo, el producto de $-4cd$ por $-8f$ es $+32cdf$; el producto de $-7ab$ por $+3fg$ es $-21abgf$.

27 Ocurre con frecuencia tener que multiplicar una letra una ó mas veces por ella misma; entonces se escusa escribir muchas veces dicha letra, y basta con escribirla una vez no mas, poniendo á su derecha un guarismo un poco mas arriba que se llama su *exponente*, y señala el número de veces que se debería escribir dicha letra como factor. V. gr. el producto de $a \times a$ es aa, y en lugar de aa se escribe a^2; en lugar de aaa, producto de $a \times a \times a$, se escribe a^3; en lugar del producto $a \times a \times a \times a$, se escribe a^4; y así prosiguiendo.

Toda letra que no tiene exponente, se considera como que tiene por exponente la unidad. Lo propio es a que a^1.

Los exponentes sirven principalmente para quando una misma letra se ha de escribir mas de dos veces como factor; porque en algunas ocasiones no se pone ex-

exponente quando la letra se ha de escribir dos veces no mas; así, en lugar de *aa*, unas veces se pone *aa*, y otras a^2.

Va muchísima diferencia del exponente al coeficiente. Este señala que una cantidad se ha de *sumar* con ella misma una, dos &c. veces, y el exponente dá á entender que una cantidad se ha de *multiplicar* por ella misma una, dos &c. veces. Así, no es $2a$ lo mismo que a^2. Con efecto, si v. gr. $a=3$; $2a$ ó $a+a$ será $3+3$, esto es 6; y a^2 será $a\times a$, ó 3×3, esto es 9.

28 De la naturaleza del exponente resulta que para multiplicar unos por otros monomios que lleven una misma letra con diferentes exponentes, se debe escribir una vez no mas dicha letra, dándole por exponente la suma de los exponentes de los factores. Por cuyo motivo, el producto de a por a^2 es a^3; el producto de a^2 por a^3 es a^5; el de a^3 por a^4 es a^7. El producto de a^2b^2 por $-a^5b^3$ es $-a^7b^5$; el producto de $-4a^2$ por $-5a^3b^2$ es $+20a^5b^2$; el de $-5a^2b^2c^2$ por $-3ab^2c^4$ es $+15a^3b^7c^6$.

Todo esto es evidente, pues lo mismo es el producto de a por a^3, que $a\times a\times a\times a$ ó a^4; el producto de a^3 por a^2 es lo propio que $a\times a\times a\times a\times a$ ó a^5, y así de los demas.

Veamos ahora como se multiplica un polynomio por un monomio; cuya operacion se reduce á multiplicar succesivamente todos los términos del polynomio por el monomio propuesto, practicando puntualmente la regla de los signos, la de los coeficientes, y la de los exponentes. La suma de todos estos productos parciales, compondrá el producto total.

V. gr. el polynomio . . . . $a^2-5ab+7cd$
multiplicado por el monomio $-5ac$

dá el producto $-5a^3c+25a^2bc-35ac^2d$.

Pa-

29 (Para multiplicar un polynomio por otro polynomio, se multiplicarán succesivamente todos los términos del multiplicando por todos los del multiplicador; se sumarán todos estos productos parciales, y resultará el producto total. Se harán en el producto las reducciones que correspondan.)

Propongámonos multiplicar

$$3a^2 - 5bd + cf$$
por . . . $-5a^2 + 4bd - 8cf$

1.er prod. $-15a^4 + 25a^2bd - 5a^2cf$
2.° prod. $+12a^2bd - 20b^2d^2 + 4bcdf$
3.° prod. $-24a^2cf + 40bcdf - 8c^2f^2$.

Prod. total $-15a^4 + 37a^2bd - 29a^2cf - 20b^2d^2 + 44bcdf - 8c^2f^2$.

Bien se vé que el multiplicando se ha multiplicado primero por $-5a^2$, despues por $4bd$, y finalmente por $-8cf$; que se han sumado todos los productos parciales, y ha resultado, hechas todas las reducciones, el producto total que vá escrito.

Si hubiéramos de multiplicar

$$-5a^2b + ab^2 - cd^2 + 8fgb$$
por. . . . . $-9ab + 4f^2 - 15mn + 9cd$

1.er prod. $+45a^3b^2 - 9a^2b^3 + 9abcd^2 - 72abfgb$,
2.° prod. $-20a^2bf^2 + 4ab^2f^2 - 4cd^2f^2 + 32f^3gb$,
3.° prod. $+75a^2bmn - 15ab^2mn + 15cd^2mn - 120fgbmn$,
4.° prod. $-45a^2bcd + 9ab^2cd - 9c^2d^3 + 72cdfgb$.

Prod. total $45a^3b^2 - 9a^2b^3 + 9abcd^2 - 72abfgb - 20a^2bf^2 + 4ab^2f^2 - 4cd^2f^2 + 32f^3gb + 75a^2bmn - 15ab^2mn + 15cd^2mn - 120fgbmn - 45a^2bcd + 9ab^2cd - 9c^2d^3 + 72cdfgb$.

Tam-

(Tambien puede ofrecerse multiplicar unas por otras mas de dos cantidades. En tal caso se empezará multiplicando dos de ellas una por otra; su producto se multiplicará por la tercera, y saldrá otro producto que se multiplicará por la quarta; y así prosiguiendo. Bien se dexa conocer que qualquiera órden que se siga en la multiplicacion de los factores, siempre ha de salir un mismo producto.)

V. gr. si hubiéramos de executar la multiplicacion indicada $-6a^2 \times -4bc \times 3mn \times -9gb$; multiplicaríamos primero $-6a^2$ por $-4bc$; su producto $+24a^2bc$ le multiplicaríamos por $+3mn$; saldria $+72a^2bcmn$, el qual multiplicaríamos por $-9gb$, cuyo producto $-648a^2bcmngb$ es el resultado de la multiplicacion indicada.

Division de las cantidades algebráicas.

30 (Dividir una cantidad por otra es lo mismo que buscar otra tercera, que multiplicada por la segunda, dé un producto igual con la primera. Podemos, pues, considerar el dividendo como si fuera el producto del divisor por el cociente.)

31 De esto, y de lo dicho (24) se infiere: 1.° Que quando así el dividendo como el divisor llevan el signo +, el cociente tambien llevará el signo +. Esta regla se expresa generalmente diciendo + *dividido* por + dá +.

2.° Quando tenga el dividendo el signo +, y el divisor el signo —, el cociente llevará el signo —. Esta regla se expresa en general de este modo: + dividido por — dá —.

3.° Si el dividendo llevare el signo —, y el divisor el signo +, el cociente llevará el signo —. Esta regla se expresa generalmente con decir — dividido por + dá —.

4.° Quando el dividendo y el divisor llevan ambos el signo —, el cociente lleva el signo +. Esta regla se expresa en general así: — dividido por — dá +.

Todo esto es evidente, una vez que el producto del divisor por el cociente, ha de llevar el mismo signo que el dividendo.

32 Supongamos en primer lugar que se nos ofrezca la division de un monomio por otro: empezarémos esta operacion poniendo el signo que ha de llevar el cociente, conforme á la regla dada poco ha, y la concluirémos borrando las letras comunes al dividendo y al divisor. Así, el cociente de esta cantidad $+ab$ dividida por estotra $+a$, es $+b$; el cociente de la cantidad $-abb$ dividida por $+ab$, es $-b$; el cociente de la cantidad $-mnpq$ dividida por $-nq$, es $+mp$.

Con efecto, una vez que para multiplicar (24) se han de poner unas letras á continuacion de otras, dándole al producto el signo que le toca, es evidente que recíprocamente se hará la division borrando las letras que tengan comunes el dividendo y el divisor, dándole al cociente el signo que le corresponde.

33 Sucede á veces que el dividendo y el divisor no tienen letras comunes; en tal caso es preciso contentarse con dexar indicada la division. La division de a por b v. gr. no se puede executar, y se queda indicada de este modo $\frac{a}{b}$. En esta expresion a se ha de considerar como el numerador de una fraccion cuyo denominador es b; por manera que si a vale 6, y b vale 7, la expresion $\frac{a}{b}$ se reduce á $\frac{6}{7}$.

En algunas ocasiones lleva el dividendo parte no mas de las letras del divisor; entonces se hace la division quanto se puede, y lo demas se queda indicado. Por esta razon, si dividimos $-abcd$ por $+abb$, el

el cociente será $-\frac{cd}{h}$; $-mnpq$ dividido por $-nrs$ dá el cociente $+\frac{mpq}{rs}$.

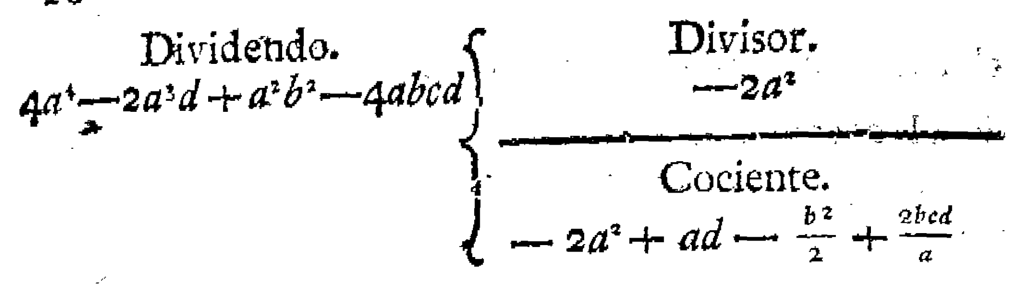
34 (Quando el dividendo ó el divisor, ó ambos tuvieren coeficientes distintos de la unidad, se dividirá por las reglas de la Arismética el coeficiente del dividendo por el del divisor, y despues se dividirán las cantidades literales, conforme acabamos de explicar.) Si hubiéramos de dividir $-15abb$ por $+3ab$, el cociente sería $-5b$. El cociente de $-35mnpq$ dividido por $-7amn$ es $+\frac{5pq}{a}$.

35 (Sentado todo esto, ya podemos dividir un polynomio qualquiera por un monomio. En el exemplo que sigue aplicarémos todas las reglas antecedentes. Hállanse en él los términos del dividendo succesivamente divididos por el divisor, y la suma de todos los cocientes parciales compone el cociente total.

Es muy del caso, para hacer con mas facilidad la division, *ordenar* el polynomio, quiero decir, poner por su órden de la izquierda á la derecha todos los términos en que se halle con mayor exponente una letra que se escogerá á arbitrio, y por el mismo orden se dividirá despues cada término del polynomio por el divisor.)

Para dividir el polynomio $a^2b^2 - 2a^3d + 4a^4 - 4abcd$ *por el monomio* $-2a^2$;

Empezarémos ordenando el polynomio por la letra a que se halla en el dividendo y en el divisor, y dispondrémos ambas cantidades como si fueran cantidades numéricas, segun se vé. Dividirémos despues todos los términos del dividendo por el divisor, escribiendo al lado cada cociente parcial conforme fuere saliendo. La suma de todos los cocientes parciales compondrá el cociente total.



Dividendo.	Divisor.
$4a^4 - 2a^3d + a^2b^2 - 4abcd$	$-2a^2$
	Cociente.
	$-2a^2 + ad - \frac{b^2}{2} + \frac{2bcd}{a}$

36 (Intentemos ahora la division de un polynomio por otro: empezarémos ordenando el dividendo y el divisor respecto de una misma letra, y despues dividirémos todas las partes del dividendo por el divisor, siguiendo el mismo método con corta diferencia que en las divisiones numéricas.)

Lo harémos mas palpable con unos exemplos. Dividamos el polynomio $3ab^2 - 3a^2b + a^3 - b^3$ por el polynomio. . . . . $-2ab + a^2 + b^2$

		Divisor.
Divid.	$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$a^2 - 2ab + b^2$
	$-a^3 + 2a^2b - ab^2$	
1. resid.	$-a^2b + 2ab^2 - b^3$	Cociente.
	$+a^2b - 2ab^2 + b^3$	$a - b$
2. resid.	0	

Ordeno primero el dividendo y el divisor por una misma letra a.

Hecho esto, 1.° divido el primer término del dividendo por el primer término del divisor, y como se considera que ambos llevan el signo $+$, el cociente llevará tambien el mismo signo el qual se podrá suprimir por ser el primero. Dividiendo despues a^3 por a^2, sale el cociente a, escríbole como se vé. Multiplico todo el divisor $a^2 - 2ab + b^2$ por el cociente parcial a, cuyo producto $a^3 - 2a^2b + ab^2$ se ha de restar del dividendo. Escríbole, pues, debaxo del dividendo con signos contrarios á los que lleva; y hecha la reduccion, quiero decir, despues de borrados los términos

que

que llevan signos contrarios, así en el dividendo, como en dicho producto, tomado negativamente, saco el residuo $-a^2b+2ab^2-b^3$ que hemos de dividir por el divisor $a^2-2ab+b^2$

2.° En esta segunda operacion divido el primer término $-a^2b$ del dividendo por el primer término a^2 del divisor; sale el segundo cociente parcial $-b$, escríbole á continuacion de la primera parte a del cociente total. Multiplico todo el divisor por $-b$, y el producto $-a^2b+2ab^2-b^3$ le escribo con signos contrarios debaxo del dividendo; y como despues de hecha la reduccion no queda nada, infiero que el cociente de la cantidad $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ dividida por $a^2-2ab+b^2$ es cabalmente $a-b$.

Si hubiéramos de dividir a^5+b^5
por. . . . . $a+b$

Divid. .	a^5+b^5	Divisor
	$-a^5-a^4b$	$a+b$
1. resid.	$-a^4b+b^5$	Cociente
	$+a^4b+a^3b^2$	$a^4-a^3b+a^2b^2-a^2b^3+b^4$
2. resid. .	$a^3b^2+b^5$	
	$-a^3b^2-a^2b^3$	
3. resid.	$-a^2b^3+b^5$	
	$+a^2b^3+ab^4$	
4. resid. .	ab^4+b^5	
	$-ab^4-b^5$	
5. resid.	0	

1.° Ordenados ya el dividendo y el divisor por la letra a, divido el primer término a^5 del dividen-

do, por el primer término a del divisor, y sale el primer cociente parcial a^4 que escribo en su lugar. Multiplico el divisor $a+b$ por a^4, y asiento su producto, despues de mudarle los signos, $-a^5-a^4b$ debaxo del dividendo. Haciendo la reduccion del dividendo, y de esta cantidad, resulta el primer residuo, ó el segundo dividendo parcial ordenado por a, $-a^4b+b^5$.

2.° Divido el primer término $-a^4b$ de este dividendo por el primer término a del divisor, y sale el segundo cociente parcial $-a^3b$, póngole á continuacion del primero. Multiplico $a+b$ por $-a^3b$, y escribo el producto con signos contrarios debaxo del dividendo, y así es $a^4b+a^3b^2$. Hecha la reduccion, el segundo residuo ó tercer dividendo parcial es $a^3b^2+b^5$.

3.° Divido el primer término a^3b^2 de este dividendo por a; sale el cociente $+a^2b^2$, y le escribo; multiplico el divisor $a+b$ por a^2b^2, y su producto con signos contrarios, que es $-a^3b^2-a^2b^3$, le pongo debaxo del dividendo. Hecha la reduccion, sale el tercer residuo, ó quarto dividendo parcial $-a^2b^3+b^5$.

4.° Divido $-a^2b^3$ por a; sale $-ab^3$, quarto cociente parcial; multiplico el divisor $a+b$ por $-ab^3$, y su producto con signos contrarios, $+a^2b^3+ab^4$, le apunto debaxo del dividendo; hago la reduccion, y saco ab^4+b^5, quarto residuo ó quinto dividendo parcial.

5.° Divido ab^4 por a, y saco el quinto cociente parcial b^4; multiplico $a+b$ por b^4, y su producto con signos contrarios, que es $-ab^4-b^5$, le escribo debaxo del dividendo. Hecha la reduccion, queda 0; y de aquí infiero que el cociente de la cantidad a^5+b^5 dividida por $a+b$ es cabalmente $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$.

37 Hay casos en que despues de ordenados el divi-

videndo y el divisor por una misma letra, se hallan varios términos donde esta letra tiene un mismo exponente. Entonces se han de colocar todos estos términos en una columna.

Para dividir v. gr. $10a^3 + 11a^2b - 19abc - 15a^2c + 3ab^2 + 15bc^2 - 5b^2c$.
por. . . . . . $3ab + 5a^2 - 5bc$.

Ordeno el dividendo y el divisor por la letra a, y saco $10a^3 + 11a^2b - 15a^2c - 19abc + 3ab^2 + 15bc^2 - 5b^2c$ que hemos de dividir por $5a^2 + 3ab - 5bc$. Pero como en el dividendo hay dos términos con a^2, y otros dos con a, dispongo el dividendo y el divisor del modo siguiente.

Divid.	$10a^3 + 11a^2b - 19abc + 15bc^2 - 5b^2c$	Divisor.
	$- 15a^2c + 3ab^2$	$5a^2 + 3ab - 5bc$
	$- 10a^3 - 6a^2b + 10abc$	
		Cociente.
1. resid.	$5a^2b - 9abc + 15bc^2 - 5b^2c$	$2a + b - 3c$
	$- 15a^2c + 3ab^2$	
	$- 5a^2b - 3ab^2 + 5b^2c$	
2. resid.	$- 15a^2c - 9abc + 15bc^2$	
	$+ 15a^2c + 9abc - 15bc^2$	
3. resid.	 0	

Divido $10a^3$ por $5a^2$, y saco el cociente $2a$; multiplico el divisor por $2a$, y pongo el producto con signos contrarios debaxo del dividendo. Hecha la reduccion, sale el primer residuo que se ve sentado.

2.° Divido el primer término $5a^2b$ de este residuo por $5a^2$; sale el cociente $+b$; multiplico el divisor por $+b$, y despues de puesto el producto con signos contrarios debaxo del dividendo, hago la reduccion, y saco el segundo residuo que va señalado.

3.° Divido el primer término $-15a^2c$ de este último residuo por $5a^2$, hago las mismas operaciones que antes, y no sobra nada. Está, pues, concluida la division, cuyo cociente cabal es $2a+b-3c$.

De los Quebrados literales.

38 Calcúlanse estos quebrados por las mismas reglas que los numéricos. Desde luego el quebrado $\frac{a}{b}$ se transforma, sin mudar de valor, en $\frac{ac}{bc}$, ó $\frac{aa}{ab}$, ó finalmente en $\frac{aa+ab}{ab+bb}$ con multiplicar por c, por a, ó por $a+b$ los dos términos del quebrado $\frac{a}{b}$.

39 El quebrado $\frac{aac}{abc}$ es el mismo que $\frac{a}{b}$, porque este es el primero, multiplicados sus dos términos por ac. El quebrado $\frac{6a^3+3a^2b}{12a^3+9a^2c}$ es el mismo que $\frac{2a+b}{4a+3c}$, porque este es el primero divididos sus dos términos por la misma cantidad $3aa$.

40 Para reducir $a+\frac{bd}{c}$ á un solo quebrado, reduzco primero a á un quebrado cuyo denominador sea c, y saco $\frac{ac}{c}$, por consiguiente $a+\frac{bd}{c}$ quedará transformado en $\frac{ac+bd}{c}$. Asimismo $a+\frac{cd-ab}{b-d}$ se convierte en $\frac{ab-ad+cd-ab}{b-d}$, con multiplicar el entero a por el denominador $b-d$.

Si despues de concluidas estas operaciones hay términos semejantes, se ha de hacer su reduccion; así, en el último exemplo, despues de transformada la cantidad $a+\frac{cd-ab}{b-d}$ en $\frac{ab-ad+cd-ab}{b-d}$, se debe reducir á $\frac{-ad+cd}{b-d}$ ó $\frac{cd-ad}{b-d}$, con borrar ab y $-ab$ que se destruyen.

Pa-

41 Para sacar los enteros que hay en un quebrado literal, se divide el numerador por el denominador quanto cabe; por esta regla reducirémos á $3b+c+\frac{cd}{a}$ la cantidad $\frac{3ab+ac+cd}{a}$, y la cantidad $\frac{a^2+4ab+4bb+cc}{a+2b}$ á $a+2b+\frac{cc}{a+2b}$, con dividirla por $a+2b$.

42 Los tres quebrados $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ se reducirán á un mismo denominador con multiplicar los dos términos a y b del primero por df, producto de los denominadores de los otros quebrados, y sacaré $\frac{adf}{bdf}$. Si multiplico los dos términos c y d del segundo por bf, producto de los otros dos denominadores, sacaré $\frac{bcf}{bdf}$; finalmente, si multiplico los dos términos $\frac{e}{f}$ del último por el producto bd de los denominadores de los otros dos, sacaré $\frac{bde}{bdf}$; por manera que los tres quebrados, despues de reducidos á un mismo denominador, son $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$.

Lo propio se practica quando los quebrados tienen algun binomio ó polynomio, ó lo son ambos términos de cada uno. Así, los quebrados $\frac{b+c}{a+b}$ y $\frac{a-2c}{a-b}$ reducidos al mismo denominador quedan transformados en $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$ y $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$, con multiplicar los dos términos del primero por $a-b$, y los dos términos del segundo por $a+b$.

43 Quando los denominadores tienen un divisor ó factor comun, se reducen los quebrados á un mismo denominador por una operacion mas sencilla. Si los quebrados propuestos fuesen $\frac{a}{bc}$ y $\frac{d}{bf}$, consideraré que los dos denominadores serian los mismos

si fuese f factor del primero, y c factor del segundo; multiplico, pues, los dos términos del primer quebrado por f, y los dos términos del segundo por c, y saco $\frac{af}{bcf}$ y $\frac{cd}{bcf}$, dos quebrados mas sencillos que $\frac{abf}{bbcf}$ y $\frac{bcd}{bbcf}$ los que saldrian por la regla dada (42). Si fuesen tres los quebrados propuestos, como $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$, $\frac{e}{cg}$, repararé que si fg fuera factor del denominador del primero, cg lo fuera del denominador del segundo, y bf del denominador del tercero, tendrian los tres quebrados un mismo denominador; multiplico, pues, los dos términos del primero por fg, los del segundo por cg, y los del tercero por bf, y saco $\frac{afg}{bcfg}$, $\frac{dcg}{bcfg}$, $\frac{bef}{bcfg}$.

Esta consideracion puede tambien aplicarse á los números, resolviéndolos en sus factores; v. gr. $\frac{5}{12}$ y $\frac{3}{16}$ son lo mismo que $\frac{5}{4\times3}$ y $\frac{3}{4\times4}$; multiplico, pues, los términos del primero por 4, y ambos términos del segundo por 3, y saco $\frac{20}{4\times3\times4}$ y $\frac{9}{4\times4\times3}$ que tienen como se ve un mismo denominador, y son lo propio que $\frac{20}{48}$ y $\frac{9}{48}$.

44 Una vez reducidos los quebrados literales á un mismo denominador, se halla su suma con sumar sus numeradores, y se halla su diferencia con restar el numerador del uno del numerador del otro.

Para sumar, pues, los dos quebrados $\frac{b+c}{a+b}$ y $\frac{a-2c}{a-b}$, les doy primero un denominador comun, con lo que los transformo en $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$ y $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$; sumo sus numeradores, y saco el quebrado $\frac{ab+ac-bb-bc+aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$, que se reduce á $\frac{2ab-ac-bb-3bc+aa}{aa-bb}$. Si quisiera restar el segundo del

pri-

primero, sacaria $\frac{ab+ac-bb-bc-aa+2ac-ab+2bc}{aa-bb}$, que se reduce á $\frac{3ac-bb+bc-aa}{aa-bb}$.

45 El producto de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$ es $\frac{ac}{bd}$; $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$ es $\frac{1}{4}ab$ (26).

Para hallar el producto de $\frac{a}{b}$ por c, considero que c es lo mismo que $\frac{c}{1}$, y practicando lo dicho poco ha saldrá $\frac{ac}{b}$.

Si el numerador y el denominador fueren polynomios, se seguirian en esta operacion las reglas de la multiplicacion de los polynomios.

46 El cociente de $\frac{a}{b}$ dividido por $\frac{c}{d}$ se sacará multiplicando $\frac{a}{b}$ por $\frac{d}{c}$ (I. 111), y saldrá $\frac{ad}{bc}$. El cociente de $\frac{a+b}{c+d}$ dividido por $\frac{c+d}{a-b}$ es el producto de $\frac{a+b}{c+d}$ por $\frac{a-b}{c+d}$, el qual es $\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)(c+d)}$, ó $\frac{a^2-b^2}{(c+d)^2}$.

El cociente de $\frac{a}{b}$ por c se saca considerando que c es lo propio que $\frac{c}{1}$, y multiplicando despues $\frac{a}{b}$ por $\frac{1}{c}$, cuyo producto es $\frac{a}{bc}$.

De las Potencias, y Raices de las cantidades literales.

Primero declararémos como se forman las potencias, y se sacan las raices de los monomios; despues enseñarémos como se forma el quadrado, y una potencia qualquiera de los polynomios; dexando para mas adelante manifestar una *fórmula* ó expresion general para sacar una raiz qualquiera de un polynomio.

De las Potencias y Raices de los Monomios.

47 (De lo dicho (27) se deduce que a^3 es la tercer potencia de a, porque a^3 es $a \times a \times a$, y que la cantidad a es tantas veces factor en su tercera potencia quantas unidades hay en el exponente de la misma potencia.

48 Ya que para multiplicar las cantidades monomias, basta sumar el exponente de cada letra (28) del multiplicando con el exponente que lleva la misma letra en el multiplicador, síguese que para elevar á una potencia propuesta una cantidad monomia, basta multiplicar el exponente de cada una de sus letras por el número que expresa á que potencia se ha de elevar dicha cantidad. A este número le llamamos el *exponente* de la potencia.)

Así, para elevar a que es a^1 al quadrado, ó á la segunda potencia, multiplicaré el exponente 1 por 2, y será a^2 el quadrado de a Para elevar a^2b^3c á la quarta potencia, multiplicaré los exponentes 2, 3, 1 por 4, y sacaré $a^8b^{12}c^4$.

La razon de esto es muy ovia: porque la quarta potencia de a^3b^2c es, por el modo de formar las potencias, $a^3b^2c \times a^3b^2c \times a^3b^2c \times a^3b^2c$; pero para efectuar esta multiplicacion he de sumar los exponentes (27); luego ya que son únos mismos en cada factor, he de sumar cada exponente quatro veces con el mismo, esto es, le he de multiplicar por 4.

49 (Si el monomio fuese un quebrado, elevaré á la potencia propuesta su numerador, y su denominador;) la quinta potencia de $\frac{a^2b^3}{cd^2}$ será $\frac{a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}$.

Síguese de lo dicho hasta aquí que la segunda potencia de $a^m b^n$ es $a^{2m} b^{2n}$; que la tercera potencia de

de $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$ es $\frac{a^{3m} b^{3n}}{c^{3p} d^{3q}}$; y en general que la potencia r de $a^m b^n$ es $a^{rm} b^{rn}$; la potencia r de $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$ es $\frac{a^{rm} b^{rn}}{c^{rp} d^{rq}}$.

50 Si la cantidad literal cuya potencia se ha de formar llevare coeficiente, se elevará tambien su coeficiente á la potencia propuesta. Así, la quinta potencia de $4a^3b^2$ es $1024a^{15}b^{10}$.

51 Por lo que mira á los signos que han de llevar las potencias, la regla es que si fuere par el exponente de la potencia que hemos de formar, la potencia siempre llevará el signo +: pero si el exponente de la potencia fuere impar, llevará el signo + ó el signo —, segun fuere positiva ó negativa la cantidad propuesta. Esto se sigue de lo dicho (24) acerca de los signos de los productos.

52 Luego para sacar la raiz de un grado qualquiera de un monomio propuesto, se dividirá el exponente de cada uno de sus factores por el exponente de la raiz, esto es, por el número que expresa su grado.

Así, la raiz tercera de $a^{12}b^6c^3$ será, con dividir todos los exponentes por 3, a^4b^2c; la raiz quinta de $a^{20}b^{15}c^5$ será a^4b^3c, dividiendo cada exponente por 5.

En general, la raiz r de $a^m b^n$ es $a^{\frac{m}{r}} b^{\frac{n}{r}}$.

53 Si la cantidad propuesta fuere un quebrado, se sacará la raiz de su numerador y de su denominador.

La raiz r de $\frac{a^m}{b^n}$ es $\frac{a^{\frac{m}{r}}}{b^{\frac{n}{r}}}$

Si

54 Si la cantidad cuya raiz se ha de sacar llevare algun coeficiente, se sacará tambien la raiz propuesta del coeficiente.

55 Quando el exponente de la raiz que se busca no es un divisor cabal de los exponentes de la cantidad propuesta, es señal de no ser esta una potencia cabal del grado que se supone. En estos casos se queda fraccionario el exponente, y señala una raiz que está por sacar. Así, la raiz cúbica de $a^9b^3c^4$ es $a^3bc^{\frac{4}{3}}$, que se reduce á $a^3bcc^{\frac{1}{3}}$, porque c^4 es $c^3 \times c^1$, con lo que será $c^{\frac{4}{3}}$ lo mismo que $cc^{\frac{1}{3}}$.

56 Para representar estas raices que no se pueden sacar cabales, se estila poner antes de la cantidad este signo $\surd$, llamado *signo radical*, poniendo en medio del signo el guarismo que expresa el grado de la raiz. $\sqrt[2]{a}$, v. gr. significa la raiz segunda ó quadrada de a; pero siempre que es la raiz quadrada la que se ha de sacar, suele omitirse el 2; la raiz quadrada de b es $\sqrt{b}$. La raiz séptima de b es $\sqrt[7]{b}$; la raiz cúbica de a es $\sqrt[3]{a}$. Y como la raiz cúbica de a es $a^{\frac{1}{3}}$ (52), síguese que $a^{\frac{1}{3}}$ es lo mismo que $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[7]{b}$ lo propio que $b^{\frac{1}{7}}$. En general, la raiz m de a^n es $a^{\frac{n}{m}}$ ó $\sqrt[m]{a^n}$. Llámanse *cantidades radicales* todas las que llevan el signo $\surd$.

57 Se hacen con estas cantidades radicales las mismas operaciones que con las otras llamadas *racionales*.

La suma de $3a\sqrt[n]{b}$ y $4\sqrt[n]{c}$ es $3a\sqrt[n]{b} + 4\sqrt[n]{c}$.

Res-

Restando $3a\sqrt[n]{b}$ de $4b\sqrt[n]{c}$, sale $4b\sqrt[n]{c} - 3a\sqrt[n]{b}$. Si los radicales son semejantes, se hace la reduccion. La suma de $4ab\sqrt[n]{c}$ y $5ab\sqrt[n]{c}$ es $9ab\sqrt[n]{c}$.

58 Si ocurriere multiplicar $\sqrt[5]{a^3}$ por $\sqrt[5]{a^4}$, transformarémos la operacion en estotra $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{5}}$, que dá $a^{\frac{7}{5}}$ ó $a \cdot a^{\frac{2}{5}}$. El producto de $\sqrt[5]{a^3}$ por $\sqrt[7]{a^4}$, será $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{7}}$, ó $a^{\frac{3}{5}+\frac{4}{7}}$, ó, con reducir los quebrados á un mismo denominador, $a^{\frac{21+20}{35}}$, ó $a^{\frac{41}{35}}$, cuya expresion se reduce á $a \cdot a^{\frac{6}{35}}$, ó finalmente $a\sqrt[35]{a^6}$.

En general $\sqrt[m]{a^n b^p} \times \sqrt[q]{a^r b^s}$ se transforma en $a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} \times a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{s}{q}}$, y esta en $a^{\frac{n}{m}+\frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m}+\frac{s}{q}}$, ó, con reducir al mismo denominador, $a^{\frac{qn+mr}{qm}} b^{\frac{pq+ms}{qm}}$, ó finalmente en (56) $\sqrt[qm]{a^{qn+mr} b^{pq+ms}}$.

Lo propio sucede en la division: $\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^3}}$ se transforma en $\frac{a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{3}{5}}}$, lo mismo que (32) $a^{\frac{1}{5}}$, ó $\sqrt[5]{a}$.

Tambien $\frac{\sqrt[5]{a^3 b^4}}{\sqrt[7]{a^2 b^3}}$ se convierte en $\frac{a^{\frac{3}{5}}\ b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{7}}\ b^{\frac{3}{7}}}$ lo mismo

que

que $a^{\frac{3}{5}-\frac{2}{7}}b^{\frac{4}{5}-\frac{3}{7}}$ (32), ó $a^{\frac{21-10}{35}}b^{\frac{28-15}{35}}$, la qual se queda en $a^{\frac{11}{35}}b^{\frac{13}{35}}$, lo mismo que $\sqrt[35]{a^{11}b^{13}}$.

En general, $\frac{\sqrt[m]{a^n b^p}}{\sqrt[q]{a^r b^s}}$ es $\frac{a^{\frac{n}{m}}\ b^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{r}{q}}\ b^{\frac{s}{q}}}$, ó $a^{\frac{n}{m}-\frac{r}{q}}$ $b^{\frac{p}{m}-\frac{s}{q}}$, ó $a^{\frac{qn-mr}{qm}}\ b^{\frac{pq-sm}{qm}}$.

59 Dá á entender el último exemplo que en lugar de $\frac{a^3}{b^2}$, pongo por caso, podemos escribir a^3b^{-2}. No hay duda en que las dos expresiones son una misma cantidad; porque todo divisor destruye en el dividendo los factores que hay en el divisor; en $\frac{a^5}{a^2}$, que se reduce (32) á a^3, el divisor a^2 destruye en a^5 dos factores iguales con a. En $\frac{a^3}{b^2}$ tambien destruye b^2 en a^3 dos factores iguales con b. Pero aunque estos factores no estén explícitamente en el dividendo, siempre podémos suponer que los incluye, porque la misma division indicada supone que b cabe en a un número de veces sea entero, sea fraccionario. Si representa m este número de veces, a valdrá m veces b ó mb.

Por consiguiente la cantidad $\frac{a^3}{b^2}$ será $\frac{m^3b^3}{b^2}$ que se reduce á m^3b; pero la cantidad a^3b^{-2} llega á ser en igual caso $m^3b^3b^{-2}$, ó (32) m^3b^{3-2}, ó m^3b. Luego, en general, *se puede trasladar una cantidad del denominador al numerador, escribiéndola en este como factor, pero con un exponente de signo contrario al que llevaba en el denominador.*

Se-

Será, pues, $\frac{1}{a^3}$, lo mismo que $1 \times a^{-3}$, ó a^{-3}; $\frac{1}{a^m}$ lo mismo que a^{-m}; $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$ lo mismo que $a^m b^n c^{-p} d^{-q}$; $\frac{a^m}{a^m}$ lo mismo que a^{m-m} que es a^0 ó 1, porque $\frac{a^m}{a^m}$ es 1. Por consiguiente: *Toda potencia cuyo exponente es cero no se distingue de la unidad.*

60 Quando las cantidades radicales no fueren de un mismo grado, será facil reducirlas á que lo sean, siempre que convenga, practicando la regla siguiente.

Si hubiere dos radicales no mas, multiplíquese el exponente del uno por el exponente del otro; el producto será el exponente comun que habrán de llevar los dos radicales; se levantará al mismo tiempo la cantidad que estuviere debaxo de cada radical á la potencia del grado que exprese el exponente del otro radical.

Para reducir, v. gr. $\sqrt[5]{a^3}$ y $\sqrt[7]{a^4}$ á un mismo radical, multiplico 5 por 7, y el producto 35 será el exponente del nuevo radical $\sqrt[35]{}$; levanto a^3 á la séptima potencia, y a^4 á la quinta, y saco a^{21} y a^{20}, por manera, que las dos cantidades propuestas quedarán transformadas en $\sqrt[35]{a^{21}}$ y $\sqrt[35]{a^{20}}$.

Para reducir á un mismo radical las cantidades $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt[7]{a^2}$ y $\sqrt[8]{a^7}$, multiplico los tres exponentes radicales 5, 7 y 8, su producto 280 será el exponente comun de los nuevos radicales; elevaré a^3 á la potencia

cia 7×8 ó 56; a^2, á la potencia 5×8 ó 40; y a^7 á la potencia 5×7 ó 35, y sacaré $\sqrt[280]{a^{168}}$, $\sqrt[280]{a^{80}}$, $\sqrt[280]{a^{245}}$.

La razon de esta práctica es muy perceptible; porque quando en el primer exemplo elevo a^3 á la séptima potencia, hago que a sea siete veces mas factor de lo que era antes; y con hacer el exponente de su radical siete veces mayor, hago a siete veces menos factor de lo que era antes; luego todo queda compensado.

De las cantidades imaginarias.

61 Ya que por lo dicho (24) así $-a \times -a$, como $+a \times +a$ es $+aa$, síguese que no puede haber quadrado alguno negativo; luego pedir la raiz quadrada de una cantidad negativa v. gr. -4, es pedir un número tal, que multiplicándole por él mismo, el producto sea -4, cuyo número no puede ser ni -2, ni $+2$. Por consiguiente la raiz quadrada de una cantidad negativa no puede ser ni un número positivo, ni un número negativo. Tampoco puede ser 0, porque 0×0 da 0, y no una cantidad negativa.

Y como no hay número alguno de los que la imaginacion alcanza que no sea mayor ó menor que 0, ó el mismo 0, hemos de inferir que la raiz quadrada de un quadrado negativo es un número imposible ó imaginario. Las expresiones $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, &c. son por consiguiente todas imaginarias. Llámanse así, porque si bien son imposibles, no dexan de ocurrir á la imaginacion, pues sabemos que $\sqrt{-4}$ v. gr. es un número el qual multiplicándole por él mismo da -4 (58).

Podemos aplicar el cálculo á estas cantidades, que suelen ocurrir en muchas investigaciones matemá-

máticas; y vamos á enseñar como se suman, restan, multiplican y parten unas por otras.

62 La suma de $\sqrt{-a^2}$ y $-3\sqrt{-a^2}$ es $-2\sqrt{-a^2}$; la suma de $-\sqrt{-x^2}$, y $\sqrt{-y^2}$ es $-\sqrt{-x^2}+\sqrt{-y^2}$; la suma de $b+\sqrt{-a^2}$, y $b-\sqrt{-a^2}$ es $2b$.

63 Si restamos $\sqrt{-a^2}$ de $-3\sqrt{-a^2}$, la diferencia será $-4\sqrt{-a^2}$; si resto $b+\sqrt{-x^2}$ de $c+\sqrt{-x^2}$, la diferencia será $c-b$.

64 Las raices $\sqrt{-b}$, $\sqrt{-c}$ se multiplican unas por otras del mismo modo que las demas; pero se pueden cometer algunas equivocaciones al tiempo de sentar los productos por razon del signo que han de llevar; vamos á enseñar como se precaven. $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$ es $-\sqrt{ab}$. Porque $\sqrt{-a}$ es lo mismo que $\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$, y $\sqrt{-b}$ lo mismo que $\sqrt{b}\times\sqrt{-1}$; será, pues, $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$ lo mismo que $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$, ó $\sqrt{ab}\times\sqrt{(-1)^2}$, que se reduce á $-\sqrt{ab}$, pues $\sqrt{(-1)^2}$ es -1 (Arism.).

65 Es muy del caso no equivocar $\sqrt{(-a)^2}$ con $\sqrt{-aa}$; la primer cantidad es $\sqrt{(-a\times-a)}$, y la otra es $\sqrt{(-a\times+a)}$. En orden á esto hay que hacer una prevencion de suma importancia. Ya que $-a\times-a$ es $+a^2$, cuya raiz es $\pm a$ (25), parece que $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$ deberia dar $\pm a$, siendo así que segun decimos da solo $-a$.

Manifestarémos la razon de esta diferencia. Quando se me pregunta qual es la raiz de aa, debo decir que es $+a$ igualmente que $-a$, porque la pregunta no determina si se considera aa como formado de $+a\times a$ ó de $-a\times-a$; pero quando se me pregunta qual es el valor de $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$, bien que por las reglas esta cantidad se reduce á $\sqrt{+a^2}$, no le puedo señalar otra raiz que $-a$, porque la misma pregunta determina que aa proviene en este caso de $-a\times-a$, y por consiguiente su raiz ha de ser $-a$.

66 Quando ocurra partir $\sqrt{-bc}$ por $\sqrt{-c}$, se

par-

partirá $\sqrt{bc} \times \sqrt{-1}$ por $\sqrt{c} \times \sqrt{-1}$; el cociente será $1 . \sqrt{b}$ ó $\sqrt{b}$.

67 Aquí haremos acerca de las imaginarias algunas consideraciones de no poca importancia.

1.° Las raices quadradas de a son indistintamente $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$; porque $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{aa} = a$, y $-\sqrt{a} \times -\sqrt{a} = +\sqrt{aa} = a$; el producto de $\sqrt{a} \times -\sqrt{a} = -\sqrt{aa} = -a$, y $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$, ó $-\sqrt{a} \times -\sqrt{a} = a$.

2.° Por lo mismo, las raices quadradas de $-a$, serán las dos cantidades imaginarias $\sqrt{-a}$ y $-\sqrt{-a}$; porque $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{(-a)^2} = -a$, y $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = +\sqrt{(-a)^2} = + - a = -a$; y el producto de $\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = -\sqrt{(-a)^2} = - -a = +a$. De lo qual se sigue que el *producto de dos cantidades imaginarias puede ser una cantidad real.*

Esta singularidad solo se verifica quando las expresiones tienen una misma cantidad debaxo del signo radical, y se multiplican en número par, esto es, de dos en dos, de quatro en quatro, &c.

$-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = -a$. Pero $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = +\sqrt{(-a)^2} \times -\sqrt{-a} = + -a \times -\sqrt{-a} = -a \times -\sqrt{-a} = a\sqrt{-a}$;

$-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = \sqrt{a^4} = aa$;

$-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = +\sqrt{a^4} \times -\sqrt{-a} = +aa \times -\sqrt{-a} = -aa\sqrt{-a}$.

68 Manifiestan estos exemplos que el producto de las imaginarias es real siempre que sea tal el número de los factores, que se desaparezca el signo $\sqrt{}$; así como el producto de los incomensurables reales da una cantidad racional siempre que el número de los factores radicales, debaxo de cuyo signo hay una misma cantidad, es par. Así

$\sqrt{}$

$\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b} = \sqrt{a^2b^2} = ab$;

$\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b} = \sqrt{a^3b^2} = ab\sqrt{a}$.

69 Quando se multiplican uno por otro dos binomios que llevan ambos una misma cantidad imaginaria, sale un producto todo real, con tal que las cantidades imaginarias sean de signo contrario.

El producto de $a - \sqrt{-b}$ por $a + \sqrt{-b}$ es $a^2 + b$; pero el producto de $a - \sqrt{-b}$ por $a - \sqrt{-b}$ es $a^2 - 2a\sqrt{(-b)} - b$. Podrá comprobarlo el que quisiere haciendo el cálculo.

De las potencias de los polynomios.

70 Dexamos dicho en la Arismética que en la potencia, sea la que fuere, de todo número es este tantas veces factor, quantas unidades hay en el exponente ó grado de la potencia; acabamos de ver que lo mismo se verifica en las potencias de las cantidades literales monomias, y por el mismo camino hallaríamos que tambien se verifica en las potencias de los polynomios, y por consiguiente en las de un binomio qualquiera v. gr. $a+x$. Serán, pues, las potencias de este binomio

2.ª $(a+x) \times (a+x) = (a+x)^2$

3.ª $(a+x) \times (a+x) \times (a+x) = (a+x)^3$

4.ª $(a+x) \times (a+x) \times (a+x) \times (a+x) = (a+x)^4$

&c.

Si executamos las multiplicaciones indicadas, hallaremos que las potencias de $a+x$ son

2.ª $a^2 + 2ax + x^2$

3.ª $a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$

4.ª $a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$

&c.

Aquí hay mucho que reparar 1.º el primer término del binomio se halla en todos los términos de la

la potencia, menos en el último; y el segundo término del binomio se halla en todos los términos de la potencia, menos en el primero.

2.° Los exponentes del primer término del binomio van menguando una unidad en cada término de la potencia, siendo su exponente en el primer término de la potencia igual al grado de esta, y cero en el último.

3.° Los exponentes del segundo término del binomio van creciendo una unidad en cada término de la potencia, siendo su exponente cero en el primer término de esta, é igual al grado de ella en el último.

4.° Por lo que mira á los coeficientes de los términos de la potencia, se sacan por esta regla: multiplíquese el coeficiente de un término por el exponente que en él lleva el primer término del binomio; pártase el producto por el número que expresa que lugar ocupa en la potencia el tal término, el cociente será el coeficiente del término que se sigue inmediatamente.

En virtud de lo dicho los términos de la quinta potencia de $a+x$ son

	a^5,	a^4x,	a^3x^2,	a^2x^2,	ax^4,	x^5
Coeficientes	1,	5,	$\frac{5\times4}{2}$,	$\frac{10\times3}{3}$,	$\frac{10\times2}{4}$,	$\frac{5\times1}{5}$
ó	1,	5,	10,	10,	5,	1

Por consiguiente la quinta potencia de $a+x$ ó $(a+x)^5$ será $a^5+5a^4x+10a^3x^2+10a^2x^3+5ax^4+x^5$.

La quarta potencia de $a-x$ será por lo mismo $a^4-4a^3x+\frac{4\times3}{2}a^2x^2-\frac{6\times2}{3}ax^3+\frac{4\times1}{4}x^4$, ó $a^4-4a^3x+6a^2x^2-4ax^3+x^4$

71 Quando ambos términos del binomio son positivos ó negativos, todos los de la potencia son positivos; pero quando de los dos términos del binomio

mio el uno es positivo y el otro negativo, todos los términos pares de la potencia son negativos, y positivos los términos nones.

Por la misma regla se hallará la potencia que se quiera de un binomio, quadrinomio, &c. v. gr. la tercer potencia de $a+b-x$.

Para este caso se haria $b-x=u$, y tendríamos que formar la tercer potencia de $a+u$, la qual es $a^3+3a^2u+3au^2+u^3$; pero como $u=b-x$, $u^2=(b-x)^2$ $=b^2-2bx+x^2$, $u^3=(b-x)^3=b^3-3b^2x+3bx^2-x^3$; haciendo las substituciones correspondientes en $a^3+3a^2u+3au^2+u^3$, sacaremos que $(a+b-x)^3=a^3+3a^2b-3a^2x+3ab^2-6abx+3ax^2+b^3-3b^2x+3bx^2-x^3$.

72 De todo lo dicho en este asunto se deduce que la potencia n de $a+x$ ó $(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x$ $+\frac{n.(n-1)}{2}a^{n-2}x^2+\frac{n.(n-1).(n-2)}{2.3}a^{n-3}x^3+$ $\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{2.3.4}a^{n-4}x^4+$ &c.

Por manera que esta es una fórmula ó expresion general en que va cifrada la potencia que se quiera del binomio $a+x$; si $n=3$, la fórmula representa la tercer potencia; si $n=6$, representa la sexta potencia.

En el caso de ser $n=3$, así que se llega al quinto término, se halla que uno de los factores del coeficiente es $n-3$, ó $3-3=0$; luego el quinto término y todos los siguientes, porque en ellos se halla el mismo factor $n-3$, serán nulos, y rematará la fórmula en el quarto término.

De las Equaciones.

73 El objeto de toda cuestion matemática es conocer una cosa incógnita, para lo qual es indispensable tenga conocida de antemano el matemático una

ó algunas circunstancias de la cosa que busca, las quales le abren camino para llegar al término que solicita. Si nada conociera, nada llegaría á conocer. Hay, pues, en toda cuestion ó problema cantidades conocidas, que tambien se llaman *datos*, y una ó muchas cantidades incógnitas. Es práctica general representar las cantidades conocidas con las primeras letras a,b,c &c. del abecedario, y las incógnitas con las últimas u,x,y,z.

Como todo el empeño está en saber á que cantidad ó cantidades conocidas es igual la cantidad incógnita, ó cada una de ellas quando son muchas, todo problema matemático para en la expresion de esta *igualdad*, poniendo entre las cantidades conocidas y la incógnita el signo $=$, que, segun diximos (I. 18) significa *igual á*; toda expresion de esta forma se llama una *equacion*. Todo lo que está á la izquierda del signo $=$, sea una sola cantidad, ó sean muchas, habiendo entre ellas los signos $+$ ó $-$, se llama *el primer miembro* de la equacion; todo lo que está á la derecha del mismo signo, se llama el *segundo miembro*.

Las cantidades que hay en algun miembro, separadas unas de otras con los signos $+$ ó $-$, se llaman *términos* del miembro donde están. En esta equacion v. gr. $a+x=b+c$, el primer miembro es $a+x$, y el segundo $b+c$; componiéndose aquel de dos términos que son x y a; y el segundo de otros dos términos que son b y c.

74 Las equaciones se diferencian unas de otras principalmente por su *grado* y su especie. Por razon del grado, las equaciones son del *primero*, *segundo*, *tercer*, &c. *grado*, segun la mayor potencia á que en ellas asciende la incógnita. Por cuyo motivo, equacion del primer grado se llama, y tambien *equacion linear* aquella cuya incógnita no pasa

de

de la primer potencia; v. gr. estas $x+a=c$, $x+4=8$; equacion del segundo grado se llama, y tambien *equacion quadrada*, aquella cuya incógnita asciende, sin pasar de ahí, á la segunda potencia, ó al quadrado; v. gr. estas $x^2+ax=bc$, $x^2+13x=56$; equacion del tercer grado se llama, y tambien *equacion cúbica* aquella cuya incógnita asciende, sin pasar de ahí, á la tercer potencia ó al cubo; estas v. gr. $x^3+x^2bx=cdf$, ó $x^3=128$ &c.

75 Las equaciones por razon de su especie son *determinadas* ó *indeterminadas*. Equacion *determinada* es la que no incluye mas que una incógnita, v. gr. estas $x+b=a$; $x^2+x=c$. Equacion *indeterminada* es la que tiene mas de una incógnita, estas v. gr. $x+y-a$, $x^2+xy=c$.

76 Una vez que el grado de una equacion solo pende de la mayor potencia á que en ella asciende la incógnita, del mismo grado será, ora tenga los términos donde están las demas potencias menores de la incógnita, ora los tenga todos ó algunos no mas; v. gr. $x^2=ab$ es del segundo grado; $x^3+ax^2+bx=cde$, $x^3+bx=cde$ son de tercer grado. Este es en las equaciones un accidente que, segun se ve, no muda su grado; tampoco muda su naturaleza, pues $x^2+dy=bc$, $x^3+axy=bcd$ &c. son equaciones indeterminadas, del mismo modo que si no les faltara término alguno.

77 Quando una equacion tiene todos sus términos, ó á lo menos no le faltan todos aquellos donde están las potencias de su incógnita inferiores al grado de la equacion, se llama equacion *completa*, *mixta*, ó *afecta*; $x^2+ax=bc$; $x^3+ax^2+bx=cde$; $x^3+bx=cde$, &c. son equaciones *mixtas* de segundo y tercer grado respectivamente; quando la equacion no lleva mas potencia de la incógnita, que la del grado cuyo es la misma equacion, se llama equa-

cion *pura ó incompleta*; $x^2=ab$; $x^3=abc$, son equaciones *puras* de segundo y tercer grado respectivamente.

Como aquí no llevamos mas empeño que enseñar como se resuelven las cuestiones ó problemas que dan origen á equaciones de primero y segundo grado, solo de estas trataremos por ahora.

De las equaciones de primer grado.

78 Como todas las cuestiones que ocurre resolver comunican á las equaciones, sean del grado que fueren, su naturaleza de determinadas é indeterminadas, y tambien de imposibles, ha de haber equaciones determinadas é indeterminadas del primer grado, igualmente que de todos los demas.

Equaciones determinadas de primer grado.

79 Sea el que fuere el grado de la equacion, el fin de todo calculador es, segun queda dicho, averiguar con ella el valor ó los valores de una incógnita, ó los valores de todas quando son muchas, para lo qual procura que la incógnita cuyo valor busca esté sola en él un miembro de la equacion, no habiendo en él otro mas que cantidades conocidas; y de toda incógnita puesta en este estado se dice que está *despejada*.

Para conseguirlo se apela á varios artificios, conforme la incógnita está mezclada ó enredada con cantidades conocidas.

80 Si la incógnita por despejar forma en algun miembro de la equacion una suma con cantidades conocidas ó incógnitas, trasladamos, ó pasamos todas estas cantidades al otro miembro, con lo que se queda sola la incógnita en el suyo. Fúndase esta regla

gla en que si á cantidades iguales añadimos ó quitamos cantidades iguales, las sumas ó diferencias que resulten serán tambien iguales.

Sea v. gr. $x+3=8$. Resto tres de cada miembro, lo que da $x+3-3=8-3$, y haciendo en ambos miembros la correspondiente reduccion, queda $x=5$. Si $x+ac=b$, con restar ac de cada miembro, sacaremos $x+ac-ac=b-ac$; y haciendo en el primer miembro la reduccion que corresponde, quedará $x=b-ac$. Si fuere $x-ac=b$, con añadir ac á cada miembro sacaremos $x-ac+ac=b+ac$; practicando en el primer miembro la debida reduccion, quedará $x=b+ac$. En general, si $x \pm ac=b$, sacaremos $x=\mp ac+b$.

Infiérese de aquí que *para pasar ó trasladar un término del un miembro de la equacion al otro, no hay sino borrarle en el miembro donde está, y asentarle con signo contrario en el otro.*

Luego, con trasladar una cantidad del un miembro al otro, haremos que de positiva se vuelva negativa, ó de negativa positiva.

81 *Quando la incógnita se halla enredada con otras cantidades por via de multiplicacion, la despejamos partiendo su término por la cantidad que la multiplica; y á fin de que subsista la equacion, partimos todos los términos de ambos miembros por el multiplicador de la incógnita.*

Si $4x=28$, tambien será $\frac{4x}{4}=\frac{28}{4}$, ó $x=7$; si $a^2y=a^3p-a^2q$, tambien será, partiéndolo todo por a^2, $y=\frac{a^3p-a^2q}{a^2}=ap-q$.

Quando la incógnita está multiplicada por muchos términos, se la asienta una sola vez, señalando su multiplicacion por la suma de los multiplicadores particulares. Si $ax-bx+3x=d$, pondre-

mos desde luego $x(a-b+3)=d$, y despues $x = \frac{d}{a-b+3}$. En lugar de $ax-x=b$, pondremos $x(a-1)=b$, lo que dará $x=\frac{b}{a-1}$.

82 Quando una misma letra ó cantidad se halla en todos los términos de la equacion, se parten todos por la tal letra, lo que simplifica la equacion; v. gr. $abb-bxx=bd$, se reduce á $ab-xx=d$, partiéndolo todo por b; $aac-aa=aabd$, se reduce á $c-1=bd$, con partirlo todo por aa.

83 *Si la incógnita estuviere dividida por una ó muchas cantidades, se la despejará multiplicando ambos miembros de la equacion por dichas cantidades.*

Si $\frac{x}{6}=9$, sacarémos por esta regla $\frac{6\times x}{6}=9\times 6$, lo mismo que $x=9\times 6$. Si $\frac{x}{a+b}=c$, saldrá $\frac{x(a+b)}{a+b}=c(a+b)$, ó $x=c(a+b)=ac+bc$.

Regla general. *Siempre que en alguna equacion hay quebrados, se quitan con multiplicar todos los términos por cada denominador.*

Si $\frac{x}{m}+\frac{2x}{n}=p$, multiplico primero por m, y saco $\frac{mx}{m}+\frac{2mx}{n}=mp$; multiplico ahora por n, y saco $\frac{mnx}{m}+\frac{2mnx}{n}=mnp$, cuya equacion se reduce á $nx+2mx=mnp$, ó $x(n+2m)=mnp$, de donde sale por último $x=\frac{mnp}{n+2m}$.

84 *Quando la incógnita está elevada á alguna potencia, se la despeja apelando á la extraccion de las raices.*

Si $x^2=81$, saco $\sqrt{x^2}=\sqrt{81}$, ó $x=9$. Si $x^4=16a^5b^2$, sacaré $\sqrt[4]{x^4}=\sqrt[4]{16a^5b^2}$, ó $x=\sqrt[4]{16a^5b^2}=2a\sqrt[4]{ab^2}$, porque $16a^5=2\times2\times2\times2\times a^4.a^1$ ó $2^4\times a^4\times a^1$. Si $a+2xx=b$, parto toda la equa-

equacion por 2 para quitar á $2xx$ su coeficiente 2, y sale $\frac{a}{2} + xx = \frac{b}{2}$; traslado, y saço $xx = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$, ó $xx = \frac{b-a}{2}$; saco la raiz quadrada, y hallo $x = \frac{\sqrt{(b-a)}}{\sqrt{2}}$ ó $\sqrt{(\frac{b-a}{2})}$.

85 *Quando la incógnita está en una equacion á manera de radical, sea del grado que fuese, se la despeja acudiendo á la formacion de las potencias.*

Sea v. gr. $a - \sqrt{x} = b$ ó $a - b = \sqrt{x}$; quadrándolo todo sale $(a-b)^2 = x$, ó $x = a - 2ab + b^2$. Si fuese $\sqrt[3]{x} - a = b$, haré $\sqrt[3]{x} = a + b$, y cubicándolo todo, $x = (a+b)^3$. Si fuese $ax - \sqrt{x} = b$, sacaré primero $ax - b = \sqrt{x}$, y quadrándolo todo saldrá $a^2x^2 - 2abx + bb = x$.

86 Finalmente, *quando son á un tiempo muchas las equaciones y las incógnitas, se reducen incógnitas y equaciones á sola una, substituyendo en una de las equaciones el valor expresado en cantidades conocidas de cada incógnita, menos una, en su lugar.*

Encuéntrome con estas dos equaciones $ax + y = b$, $x + by = a$, cada una con dos incógnitas x é y. Propóngome eliminar ó borrar una de ellas, v. gr. y; despéjola en la primer equacion, y saco $y = b - ax$, cuyo valor de y voy á substituir en la segunda equacion. Pero como en esta b multiplica y; tambien b ha de multiplicar $b - ax$; executo esta multiplicacion, y saco $by = bb - abx$; substituyo, pues, en la segunda equacion en lugar de by su valor $bb - abx$, mediante cuya substitucion, la segunda de las dos equaciones primitivas, esto es, $x + by = a$, se transforma en $x + bb - abx = a$, la qual no lleva mas incógnita que x.

Si quisiera eliminar x en la segunda equacion, sa-

sacaría desde luego su valor de la primera, trasladando y, cuya transposicion daria $ax=b-y$; despues partiría por a, con la mira de despejar x, y saldría $x=\frac{b-y}{a}$. Ultimamente substituiría $\frac{b-y}{a}$ en lugar de x en la segunda equacion, de cuya operacion saldría $\frac{b-y}{a}+by=a$, donde no hay mas incógnita que y.

Si tuviéramos las tres equaciones $x+y+z=a$, $x+y-z=b$, $x-y+z=c$, podríamos eliminar dos incógnitas en cada una por medio de la substitucion. Para este fin tomaríamos en la primera el valor de x, y sacaríamos $x=a-y-z$, substituiríamos $a-y-z$ en lugar de x en las otras dos equaciones, y saldría $a-y-z+y-z=b$, $a-y-z-y+z=c$, las quales se reducen á $a-2z=b$, y $a-2y=c$, con sola una incógnita cada una. Si quisiéramos que en la primera no hubiese mas incógnita que x, tomaríamos el valor de z y el de y en las otras dos equaciones $a-2z=b$, $a-2y=c$, de donde sacaríamos desde luego trasladando, $a-b=2z$, y $a-c=2y$; partiendo despues por 2 saldría $\frac{a-b}{2}=z$, $\frac{a-c}{2}=y$; substituyendo finalmente estos valores en lugar de z é y en la primera equacion, sacaríamos $x+\frac{a-c}{2}+\frac{a-b}{2}=a$, quitando el denominador 2, y trasladando sale $2x=2a-a+c-a+b=b+c$, y partiendo por 2, $x=\frac{b+c}{2}$.

Antes de aplicar lo dicho hasta aquí á la resolucion de las cuestiones determinadas de primer grado, daremos algunas reglas generales sobre esta importante aplicacion.

Advertencias acerca de la resolucion de las cuestiones.

87 El que intenta resolver por Algebra alguna cues-

cuestion, lo primero que le toca hacer es considerar atentamente su naturaleza, y todas sus circunstancias para hacerse cargo de los datos que presenta, y de lo que se busca. Logrado esto, desechará todas las condiciones ó circunstancias que no tengan relacion ó conexîon necesaria con la cantidad que desea hallar. Despues dará nombres á todas las cantidades que han de entrar en el cálculo, sean dadas ó incógnitas; quiero decir, que señalará todas las cantidades, ó por lo menos las principales con otras tantas letras diferentes, como diximos, esto es, las cantidades conocidas con las primeras letras a, b, c, &c. del abecedario, y las incógnitas con las últimas u, x, y, &c. con la precisa circunstancia de expresar en todo el discurso de la operacion una misma cantidad con la misma letra.

88 En las cuestiones generales será muy acertado hacer eleccion, para representar las cantidades, de aquellas letras ó símbolos que pueden recordarlas al entendimiento; v. gr. el radio se llamará r; el seno, s; la velocidad, u; el tiempo, t &c.

Aunque las cantidades sean de diferente especie, pueden figurarse con un mismo símbolo 1, y esta es la notacion mas sencilla. Todo grado de movimiento v. gr. será 1: todo grado de velocidad será 1 &c. Pero en este caso se pondrá cuidado en expresar las otras cantidades de la misma especie con símbolos ó números proporcionales; quiero decir que 2 expresará dos grados de movimiento, &c.

89 Tambien se pueden medir cantidades de una especie por otras de especie diferente proporcionales con las partes ó grados de las primeras. Las cantidades ó grados de fuerza v. gr. se podrán expresar ó medir con lineas proporcionales con ellas; los cuerpos ó la cantidad de materia de que se componen, por su peso; las velocidades, por los espacios

cios andados en tiempos iguales; y finalmente toda especie de cosas ó cantidades con números.

90 Como la resolucion de una cuestion manifiesta tanto mas la destreza del calculador, quantas menos cantidades incógnitas introduce al principio; despues de señalar con letras las cantidades principales, dexará sin nombre todas aquellas que facilmente pueden inferirse de las demas. Quando es conocida una suma v. gr. y una de sus dos partes, es muy facil sacar la otra parte; dadas las dos partes, tambien se sacará el todo. Una vez que en un triángulo rectángulo estén figurados dos de sus lados con símbolos algebráicos, no se necesitará símbolo alguno para expresar el otro lado, pues su expresion será la suma ó la diferencia de los quadrados de los dos lados; dados que sean los tres primeros términos de una proporcion, será facil expresar el quarto, sin necesidad de ningun símbolo nuevo. Todo esto manifiesta lo que debe practicarse siempre que los valores de algunas cantidades pueden sacarse del valor de las otras, cuya práctica proporciona el haber menos términos que exterminar.

91 Señaladas que estén con letras las cantidades, es necesario trasladar la cuestion de la lengua comun á la lengua del Algebra; quiero decir, que todas sus condiciones se han de cifrar en otras tantas equaciones. Para esto se supone hecho lo que está por hacer; y entonces, sin distincion de cantidades conocidas é incógnitas, se toma una, conocida ó incógnita para empezar con ella el cálculo, aquella que se discurre dará una equacion mas sencilla, ó proporcionará una resolucion mas facil, ó será menos dificultosa de hallar, ó de expresar con una equacion. Por lo que, en muchos casos suele traer conveniencia no empezar en derechura el cálculo por la cantidad que se busca, sino por otra de

la

la qual sea mas fácil inferir el valor de la incógnita.

92 Por medio de estas cantidades introducidas desde el principio en el cálculo, se sacarán por el método sintético otras, de estas otras, &c. con arreglo á las condiciones de la cuestion, hasta conseguir las equaciones necesarias. Aquí es donde importa atender con el mayor cuidado á la naturaleza y fin de la cuestion, calar todas sus circunstancias, y las particulares relaciones de unas cantidades con otras; de modo que solo este cuidado puede proporcionar el correspondiente número de equaciones. Casos ocurren sin embargo donde estas equaciones no pueden sacarse por los términos de la cuestion, porque penden de propiedades ocultas de las cantidades que encierra; de cuyas propiedades será preciso inferir las equaciones, aplicando la consideracion y el discurso á la naturaleza del asunto que se trata. En las cuestiones numéricas v. gr. se aplicará la consideracion á las propiedades de los números; en las cuestiones geométricas, á los elementos de Geometría; en los problemas mecánicos, á los principios de Mecánica; en las cuestiones trigonométricas; á las reglas de Trigonometría; en las cuestiones de Física, á las leyes del movimiento, &c. Un punto muy esencial es procurar que unas equaciones no pendan de otras, y que haya tantas, quantas incógnitas; donde no, la cuestion será indeterminada.

93 Una vez sacado el correspondiente número de equaciones, el asunto queda reducido á eliminarlas una por una hasta que no haya mas que una sola incógnita en la equacion final; en llegando la operacion á este estado, se dice que la cuestion está resuelta. La exterminacion de las cantidades ha de empezar, como es natural, por las mas fáciles de

ex-

exterminar, quiero decir por las mas sencillas, hasta que las que quedan al último dan la equacion mas sencilla que se pueda, ó mas sencilla por lo menos que si para la equacion final se quedara otra incógnita. Claro está que en quantas operaciones se executan para llegar á este paradero debe conservarse la equacion ó igualdad, y esto se consigue por los principios y reglas dadas hasta aquí.

94 Por lo que mira á la eleccion de los términos con que conviene empezar el cálculo, suele ser tal la relacion de dos cantidades con las demas, que qualquiera de ellas da equaciones de todo punto semejantes, ó, si se hace uso de ambas, sale una misma equacion final. Entonces lo mas acertado es no valerse de ninguno de los dos términos; sí de otro tercero que tenga una misma relacion con ambos. Tal es v. gr. la mitad de su suma, la mitad de su diferencia, una media proporcional entre ellos; ú otra cantidad comparada indiferentemente, sin tener semejanza.

95 La propiedad ó el tino con que se expresan los términos, suele abreviar las operaciones. Si se buscan v. gr. dos números cuya suma ó diferencia n es dada, traerá mucha conveniencia expresar los dos números con $\frac{1}{2}n+a$, $\frac{1}{2}n-a$.

Si se buscan números en progresion arismética, cuya diferencia d es conocida, será del caso expresar los números con $a-d$, a, $a+d$ si fuesen tres; y así de los demas.

Si se buscan muchos números en progresion geométrica, se expresarán del modo siguiente aa, ae, ee, si fuesen tres; ó de este otro a^3, a^2e, ae^2, e^3, si fuesen quatro, &c. ó dándoles otras expresiones que tengan tan pocas letras como quepa.

96 A veces un problema para en equaciones tan complicadas, que cuesta mucho trabajo eliminar las can-

cantidades incógnitas. En estos casos se substituyen otras letras en lugar de las sumas ó productos, ó potencias, &c. de algunas de las primeras cantidades, por cuyo medio se eliminan todas estas, y se logra el competente número de equaciones. Mediante este artificio, suele sacarse el valor de las nuevas cantidades por equaciones mas sencillas y fáciles; conseguido esto, las cantidades introducidas al principio se determinan mas fácilmente. Estas nuevas cantidades se prueban para dar la preferencia á las que suministren una equacion mas facil.

Simplificará tambien muchisimo el cálculo el reducir á sola una cantidad conocida el coeficiente de alguna cantidad incógnita quando constare de muchas.

97 Todas las advertencias hechas hasta aquí se aplican á los problemas de Geometría igualmente que á los numéricos; pero no bastan. Piden los problemas geométricos mas aparato, y tambien mas trabajo y destreza. Por decontado es preciso trazar una figura ajustada á las circunstancias de la cuestion; tirar v. gr. lineas rectas, lineas paralelas ó perpendiculares á otras, ó á puntos dados, ó que pasen por puntos dados; trazar triángulos semejantes unos á otros. Todos estos son preparativos fundamentales para resolver el problema, en los quales siempre debe procurarse resolver la figura en triángulos semejantes, en triángulos rectángulos, ó en triángulos dados. Despues se toma por incógnita aquella linea que se discurre proporcionará una equacion mas sencilla. Porque el cálculo debe empezarse con una cantidad conocida ó incógnita, por medio de la qual se irá buscando sintéticamente lo demas. En general, señálense con letras las cantidades mas próxîmas á las partes dadas de la figura, por medio de las quales puedan hallarse las demas partes con-

contiguas; v. gr. en los triángulos se tirará una perpendicular desde el extremo de un lado opuesto al ángulo dado. Una vez hechas estas preparaciones, conforme tenga por mas conveniente el calculador para sus fines, y la resolucion del problema, proseguirá su cálculo sujetándose á la naturaleza y propiedades de las lineas, y á las condiciones de la cuestion, procediendo de las cantidades que hubiese tomado á otras cantidades, segun pida la relacion de las lineas, hasta sacar dos valores de una misma incógnita, ó dos expresiones diferentes de una misma cantidad, con las quales formará una equacion. Los principios generales para entablar esta comparacion, son *la adicion ó sustraccion* de las lineas, que darán su suma ó diferencia; la proporcion entre las lineas, que se infiere de los triángulos semejantes, mediante la qual dados tres términos se saca el quarto; la adicion ó sustraccion de los quadrados en los triángulos rectángulos, de los quales, dados dos lados, se halla sobre la marcha el tercero. La doctrina de las proporciones, igualmente que todas las proposiciones de Geometría adaptables á la cuestion, como las demostradas en el Tomo I. y otras muchas, segun los casos. Con el auxîlio de estos principios, y un discurso muy seguido y encadenado, se hallarán tantas equaciones quantas incógnitas hubiere; y halladas estas equaciones, se mudará de rumbo, para exterminar las cantidades superfluas, y sacar la raiz de la última equacion.

98 Si el rumbo que se tomó al principio para la resolucion del problema encaminare á equaciones muy altas ó surdas, trazará el calculador otras figuras, y empezará otra vez el cálculo hasta encontrar un método tan elegante como posible sea. Porque el principal artificio de la resolucion de los proble-

blemas, está en señalar las posiciones con tal tino que la resolucion pare por último en una equacion tan sencilla como elegante; habiendo métodos que proporcionan equaciones y resoluciones mas intrincadas unas que otras. Todo esto lo enseñará la práctica y experiencia, porque las reglas generales no pueden solas infundir la destreza de hallar los medios mas sencillos y las resoluciones mas fáciles.

99 Digamos algo del caso en que haya dudas acerca de la cantidad que se ha de buscar ó tomar por incógnita, de forma que salga la equacion mas sencilla. Supongo que sea x la incógnita de la equacion final; tomo otra incógnita y que rezelo ha de proporcionar una equacion mas sencilla; formo una equacion entre x é y; si y fuese entonces de potencia tan alta como x, la equacion final con y será tan alta como la equacion final con x.

O, despues de formar equacion entre x é y, substituyo en lugar de x su valor en y en la equacion final con x; indago que potencia de y saldrá de aquí, sin empezar otra vez el cálculo con y; si la equacion entre x é y no fuese simple, convendrá empezar de nuevo el cálculo con y.

O, si hubiese diferentes incógnitas, y no se conoce qual dará la equacion mas sencilla; señálense todas con letras, y háganse otras tantas equaciones; elimínense aquellas cuya eliminacion sea mas facil, y se lograrán por la mayor parte equaciones mas sencillas.

Finalmente, una vez hallada la equacion final, sáquese su raiz, y quedará resuelta en números la cuestion.

100 En toda cuestion los números dados pueden tomarse á arbitrio; pero las mas veces están ceñidos dentro de señalados límites, los que se co-

nocen comunmente por los teoremas ó proposiciones que pueden inferirse de la resolucion de la cuestion.

A veces la equacion donde está la cantidad que se busca, lleva tambien otra incógnita, que conviene eliminar y cuya exterminacion la levanta á alguna potencia mas alta: si esta otra incógnita se halla solo en pocos términos, y estos muy pequeños respecto de los demas, se adivinará próxîmamente su valor, y se substituirá en su lugar, lo que alterará poco la equacion, suponiendo muy aproxîmado su valor supuesto. Sacando despues la raiz de la equacion, saldrá próxîmamente el valor de la otra cantidad incógnita. Se buscará despues en la equacion otro valor mas aproxîmado de la segunda incógnita, se hará otra vez la extraccion de la raiz de la equacion, &c.

El valor aproxîmado de la segunda cantidad se adivinará las mas veces por medio de las condiciones de la cuestion, y, si fuese geométrica, por las circunstancias de las figuras.

Resolucion de algunas cuestiones determinadas de primer grado.

101 En las operaciones que requieren cálculos prolijos es necesario manifestar como se originan unas de otras las varias equaciones que encaminan el calculador á la equacion final. Si esto se hiciera con palabras, sería las mas veces un trabajo fastidiosísimo; por cuyo motivo lo darémos á conocer en la resolucion de muchas cuestiones con signos particulares.

Al lado izquierdo de las equaciones conforme vayan saliendo sentaremos los números 1, 2, &c y á mano izquierda de los números pondremos

sig-

signos +, —, × &c. que señalarán si la equacion se compone por adicion, sustraccion, multiplicacion, &c. de otras cantidades ú otras equaciones. Véase el exemplo siguiente y su explicacion.

Sea {	1	$a + e = b$
	2	$a - e = c$
$1+2$	3	$2a = b + c$
$1-2$	4	$2e = b - c$
1×2	5	$aa - ee = bc$
$1 \div 2$	6	$\frac{a+e}{a-e} = \frac{b}{c}$
$1\ \sqrt{}$	7	$\sqrt{(a+e)} = \sqrt{b}$
$4\ (\ )^2$	8	$4ee = bb - 2bc + cc$
$3+7$	9	$2a + \sqrt{(a+e)} = b + c + \sqrt{b}$
3×5	10	$2a^3 - 2ae^2 = bbc - bcc$
$3+(4)$	11	$2a + 4 = b + c + 4$
$4 \div (4)$	12	$\frac{e}{2} = \frac{b-c}{4}$
$9 - \sqrt{a+e}$	13	$2a = b + c + \sqrt{b} - \sqrt{(a+e)}$
$3 = 13$	14	$b + c = b + c + \sqrt{b} - \sqrt{(a+e)}$.

Explicacion de los signos.

1+2 puesto á la izquierda del 3 significa que la tercer equacion se saca sumando la segunda con la primera. 1—2 á la izquierda del 4 significa que la quarta se saca restando la segunda de la primera. 1 × 2 puesto al lado de la quinta equacion señala que esta es el producto de la primera por la segunda. 1 ÷ 2 quiere decir que la sexta equacion nace de la division de la primera partida por la segunda. 1 con $\sqrt{}$ al lado demuestra que la séptima equacion es la raiz quadrada de la primera. 4 con $(\ )^2$ al lado de la octava significa que esta es la quarta equacion elevada á la segunda potencia; 3+7 es la suma de la tercera y la séptima;

4×5, señala el producto de la quarta por la quinta; $3+(4)$ es la tercera equacion á la qual se ha añadido 4; $4\div(4)$, es la quarta equacion partida por 4; $9-\sqrt{a+e}$, es la novena de la qual se ha restado $\sqrt{a+e}$; finalmente $3=13$ significa que la 14 equacion procede de la igualacion del segundo miembro de la tercera equacion con el segundo miembro de la equacion 13.

102 A fin de que se entienda mejor la resolucion de algunas cuestiones, hemos de recordar algunas propiedades de las progresiones arisméticas y geométricas, de las quales inferiremos otras que nos harán al caso.

Por la naturaleza de la progresion arismética que dimos á conocer en los principios de Arismética, son progresiones arisméticas las quatro series siguientes.

$$\begin{cases} \div 0 \,.\; a \,.\; 2a \,.\; 4a \,.\; 4a \,.\; 5a \,.\; 6a \text{ \&c. creciente.} \\ \div 0 \,.\; -a \,.\; -2a \,.\; -3a \,.\; -4a \,.\; -5a \,.\; -6a \text{ \&c. decreciente.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \div a \,.\; a+d \,.\; a+2d \,.\; a+3d \,.\; a+4d \,.\; a+5d \,.\; a+6d \text{ \&c. crec.}^{te} \\ \div a \,.\; a-d \,.\; a-2d \,.\; a-3d \,.\; a-4d \,.\; a-5d \,.\; a-6d \text{ \&c. decr.}^{te} \end{cases}$$

103 Aquí se vé á las claras 1.° que si en qualquiera de las quatro progresiones se toman tres términos inmediatos, estén donde estuvieren, la suma de los extremos será dupla del término medio.

2.° que si se toman quatro términos, la suma de los extremos es igual á la suma de los medios.

104 Luego si los términos de la progresion fuesen pares, la suma de los extremos siempre será igual á la suma de los dos medios equidistantes de los extremos. En la tercera de las tres progresiones v. gr. $a+a+5d=a+d+a+4d=a+2d+a+3d$.

105 Por consiguiente, si se multiplica la suma de los extremos, esto es, del primer y último término

no de la progresion por el número de sus términos, el producto será duplo de la suma de los términos de la progresion. Porque tomar la suma de los extremos tantas veces quantos términos hay en la progresion, es tomar el duplo de sus términos.

106 Síguese de aquí que si llamamos a el primer término de una progresion, u el último, d la diferencia, n el número de los términos, y s su suma, será $(a+u) \times n = 2s$, y $\frac{(a+u)n}{2} = s$.

107 Tambien es facilísimo de manifestar, y se sigue inmediatamente de la formacion de toda progresion arismética creciente, que el último término es la suma del primero a y de tantas veces la diferencia d, quantos son los términos, menos uno, ó tomada $n-1$ veces. Por manera que $u = a + (n-1)d$.

108 Luego $u-a=(n-1)d$; quiero decir, que la diferencia que va del último término de la progresion al primero, es el producto de la diferencia d multiplicada por el número de los términos, menos la unidad,

Luego $d = \frac{u-a}{n-1}$.

109 De lo dicho en la Arismética acerca de la progresion geométrica se sigue que son progresiones geométricas las dos series siguientes.

$$\begin{cases} \div 1 : a : a^2 : a^3 : a^4 : a^5 : a^6 \text{ \&c.} \\ \div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : aq^6 \text{ \&c.} \end{cases}$$

Pues si se parte cada término por su inmediato siempre saldrá un mismo cociente. Si cada término de la primer progresion se parte por su inmediato antecedente, el cociente será a; si se le parte por su inmediato consecuente, el cociente será $\frac{1}{a}$.

En la segunda progresion, el cociente de cada término por su inmediato antecedente es q; el cociente de cada término por el que se le sigue es $\frac{1}{q}$.

110 En ambas progresiones es de notar, y se demostró generalmente en otra parte, que cada término es el producto del primero por una potencia del exponente, cuyo grado tiene tantas unidades, menos una, quantos términos hay en la progresion hasta el término que se considera, inclusive. Luego siendo n el número de los términos de una progresion geométrica; a, el primero; u, el último, q, el exponente, será $u = aq^{n-1}$.

111 De la naturaleza de la progresion geométrica se sigue 1.° que si tres cantidades están en progresion, el producto de los extremos es igual al quadrado del término medio; 2.° que si quatro cantidades estan en progresion, el producto de los extremos es igual al producto de los medios. Porque, por formar progresion las quatro cantidades, la misma razon ha de haber entre las dos primeras, que entre las dos últimas. Todo esto quedó ya probado en otra parte.

112 Luego quando los términos de una progresion geométrica son pares, el producto de los dos términos extremos es igual al producto de otros dos términos equidistantes de los mismos extremos.

113 De la naturaleza de toda progresion geométrica se sigue que todos los términos menos el último son antecedentes, y que todos los términos menos el primero son consecuentes. Luego si llamanos s la suma de todos los términos de la progresion, a el primer término, q el exponente, u el último término, será $s-u : s-a :: a : aq$. Porque dexamos probado en la Arismética que quando hay muchas cantidades en proporcion la suma

de

de los antecedentes, es á la suma de los consecuentes, como un antecedente á su consecuente.

114 Si en lugar de u substituimos aq^{n-1} su igual (110), saldrá $s-aq^{n-1} : s-a :: a : aq$, de donde, con multiplicar extremos y medios, sale $sa-aa = saq-a^2q^n$; luego, trasladando, $a^2q^n-aa=saq-sa$, ó $aq^n-a=sq-s$, partiéndolo todo por a, y últimamente $s=\frac{aq^n-a}{q-1}$.

115 Cuestion 1. *Dada la suma* a *y la diferencia* d *de dos cantidades, hallar el valor de cada una.*

	1	sean las dos cantidades x é y,
	2	$x+y=a$ } cuestion
	3	$x-y=d$ }
2+3	4	$2x=a+d$
2—3	5	$2y=a-d$
4 : (2)		$x=\frac{a+d}{2}$
5÷(2)	6	$y=\frac{a-d}{2}$.

Esto quiere decir que de dos cantidades una mayor que otra, la mayor vale la mitad de la suma de ambas, mas la mitad de su diferencia; y la menor vale la mitad de la suma de ambas, menos la mitad de su diferencia. Ya quedó probado en la Trigonometría.

116 Cuestion 2. *Hallar un número el qual restado de* 10 *quede* 15.

Sea	1	x el tal número
	2	$10-x=15$ cuestion
2 trasladando	3	$10-15=x$
3 reduciendo	4	$-5=x$

Este valor negativo de x manifiesta que la cuestion

tion se ha de proponer al reves, en estos términos.

117 Cuestion 3. *Hallar un número el qual, añadido á 10, sea 15 la suma.*

Sea	1	x el número
será	2	$10+x=15$ cuestion
2 trasl.	3	$x=15-10$
3 red.	4	$x=5$

Esto acaba de manifestar lo que dexamos dicho en la Arismética (I. 32) acerca de las cantidades positivas y negativas, y que concepto debe formarse de las cuestiones cuya resolucion da negativo el valor de la incógnita.

118 Cuestion 4. *Manifestar los fundamentos y la práctica de la regla de compañía.*

La regla llamada de compañía sirve para averiguar la parte que toca de la pérdida ó ganancia á cada uno de muchos compañeros que han juntado sus caudales para alguna especulacion de comercio, á proporcion de la puesta ó caudal de cada uno.

La regla de compañía puede ser simple ó sin tiempo, y compuesta ó con tiempo.

La regla de compañía sin tiempo es quando las puestas de todos los asociados permanecen un mismo tiempo en el caudal, capital ó puesta comun. Claro está que para sacar la parte que corresponde á cada compañero de las pérdidas ó ganancias, hay que atender á sola una circunstancia, esto es, á la cantidad de su puesta, por cuyo motivo la regla es regla de compañía simple. Para hallar la parte que le toca á cada asociado de lo que la compañía ha ganado ó perdido, hemos de comparar la suma de todas las puestas, ó la puesta total, con toda la ganancia ó pérdida; pues lo que la primer suma es respecto de la segunda, la puesta

ta de cada asociado será respecto de la parte que le cabe en toda la ganancia ó pérdida; ó, lo que es lo propio, lo que sea cada puesta particular en la suma de las puestas, ha de ser cada ganancia ó pérdida en el todo de las ganancias ó pérdidas.

La regla de compañía compuesta ó con tiempo se verifica quando no permanecen un mismo tiempo en el caudal comun los caudales ó puestas particulares. Para hacer con equidad el repartimiento de las ganancias ó pérdidas, es preciso atender á la puesta de cada compañero, y al tiempo que la tuvo en el fondo comun, por cuyas dos circunstancias la regla es regla de compañía compuesta.

Toda regla de compañía compuesta se reduce á la de compañía simple, mediante lo qual se resuelven todas por un mismo método las cuestiones que corresponden á ambas reglas. Con este fin se multiplica cada puesta por el tiempo, sean años, meses &c. que se queda en el fondo comun; súmanse despues unos con otros los productos, se comparan con las ganancias ó pérdidas, y finalmente se concluye la operacion del mismo modo que quando la regla es sin tiempo. Esto presupuesto.

119 Cuestion 5. *Partir un número conocido* a *en tres partes que tengan unas con otras la misma razon que las cantidades* m, n, p, *esto es, tales que sea la primera á la segunda, como* m *es á* n, *y la primera á la tercera, como* m *es á* p.

	1	Llamo x la primer parte	
	2	$m : n :: x : \frac{px}{m}$	cuestion
	3	$m : p :: x : \frac{px}{m}$	
	4	$x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m} = a$	
$4 \times m$	5	$mx + nx + px = ma$	
$5 \div (m+n+p)$	6	$x = \frac{ma}{m+n+p}$	

Pa-

Para aplicar esta resolucion general á un caso particular de la regla de compañía sin tiempo, supondremos que tres mercaderes han hecho compañía cuyo caudal es de 96 pesos; la puesta del primero es 24^p, la del segundo 32, y la del tercero 40^p; las ganancias de la compañía montan 12 pesos ¿quanto corresponde á cada uno?

Aquí $a = 12$, $m = 24$, $n = 32$, $p = 40$. Luego $x = \frac{ma}{m+n+p} = \frac{24 \times 12}{24+32+40} = \frac{288}{96} = 3$, parte del primero, ó valor de x, cuyo valor substituido en las expresiones $\frac{nx}{m}$ y $\frac{px}{m}$, dará $\frac{nx}{m} = \frac{3 \times 32}{24} = 4$, parte del segundo mercader; $\frac{px}{m} = \frac{40 \times 3}{24} = 5$, parte del tercer asociado;

Luego han tocado

Al primer compañero.	3^{pe}
Al segundo.	4
Al tercero	5
	12^{pe}

cuyas partidas componen el total de la ganancia.

Supongamos ahora que tres mercaderes forman una compañía, poniendo el primero 65 pesos, que están 8 meses en el caudal comun; el segundo pone 78 pesos, que dexa 12 meses en el caudal comun; y el tercero pone 84 pesos, que quedan 6 meses en el fondo comun; las ganancias ascienden á 166 pesos, ¿que parte corresponde á cada mercader?

Para reducir esta cuestion á una regla de tres simple, se ha de multiplicar por 8 la puesta del primero, la del segundo por 12, y la del tercero por 6, con lo que las puestas serán 520, 936 y 504, cuya suma es 1960. Será por consiguiente $m = 65 \times 8 = 520$, $n = 78 \times 12 = 936$, $p = 84 \times 6$ $=$

$=504$ y $a=166$. Luego $x=\frac{ma}{m+n+p}=\frac{166\times 520}{520+936+504}=\frac{86320}{1960}=44,0408$; $\frac{nx}{m}=\frac{936\times 44,0408}{520}=79,2734$; $\frac{px}{m}=\frac{44\times 0408\times 504}{520}=42,6856$.

Luego han tocado

Al primer compañero. .	x	$=44,0408$
Al segundo.	$\frac{nx}{m}$	$=79,2734$
Al tercero.	$\frac{px}{m}$	$=42,6856$
Que montan.		165,9998

cuya suma algo discrepa de la verdadera por causa de los quebrados, pero discrepa una cantidad despreciable.

120 Cuestion 6. *Manifestar los fundamentos y la práctica de la regla de falsa posicion.*

Sirve esta regla para resolver cuestiones pertenecientes á la regla de compañía, de cuya regla se diferencia en que aquí no se toman las partes proporcionales conforme las da la cuestion; pero se toma una á arbitrio, haciendo un supuesto falso, á la qual van subordinadas las demas, con arreglo á los términos de la pregunta; lo que facilita mucho el cálculo.

Este es el camino que siguen para resolver las cuestiones peculiares á la regla de falsa posicion, los Escritores de Arismética. Por Algebra se resuelven con mas facilidad y brevedad, conforme lo manifestarémos aquí en un par de exemplos, y en otros muchos mas adelante.

121 Cuestion 7. *Hallar un número tal, que la suma de su* $\frac{1}{3}$, *su* $\frac{1}{5}$, *sus* $\frac{3}{7}$ *sea* 808.

	1	Llamo x al número que se pide
	2	$\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}x+\frac{3}{7}x=\frac{101}{105}x=808$ cuestion.
$2\times(105)$	3	$101x=84840$
$3\div(101)$	4	$x=840$

Cues-

122 Cuestion 8. *Partir 720*[rs] *entre tres compañeros, que al segundo le toquen 40*[rs] *mas que al primero, y al tercero 80*[rs] *mas que al primero.*

Sea	1	x la parte del primero	
	2	$x+40$ la parte del segundo	cuestion
	3	$x+80$ la parte del tercero	
1+2+3	4	$3x+120=720$ cuestion	
4 trasl.	5	$3x=720-120=600$	
5 ÷ (3)	6	$x=\frac{600}{3}=200$	

Luego la parte del primero. . = 200
La del segundo . . . . = 240
La del tercero. . . . . = 280

Cuyas tres partidas montan. 720
la cantidad que se habia de repartir.

123 Cuestion 9. *Manifestar los fundamentos y la práctica de la regla de dos falsas posiciones.*

Primero daremos á conocer por medio de un exemplo muy sencillo en que consiste esta regla, para cuya práctica se han de hacer dos supuestos falsos.

Se me piden dos números cuya suma sea 13, y la diferencia 5.

Supongo que el menor de los dos números sea 2; el mayor será 7, y la suma de los dos 9. Por consiguiente hay en este supuesto 4 de equivocacion, que faltan para que la suma de los dos números sea 13, ó hay en este supuesto -4 de equivocacion. Supongo despues que el número menor sea 3, el mayor será 8, la suma 11, y habrá una equivocacion de -2. Sé por otra parte que el número que busco es $\frac{13}{2}-\frac{5}{2}=\frac{8}{2}$ $=4$ (115), y veo que la primera equivocacion se ha á la segunda, como la diferencia entre el primer número supuesto, y el número que busco, esto es 4, es á la diferencia entre el segundo número supuesto, y el mis-

mismo número que busco; porque $-4:-2::2:1$. Vamos á dar un método general para hallar en este caso el número que se busca.

Llámole x; a, el primer número supuesto; b, el segundo; c, la primera equivocacion; d, la segunda. Digo, pues, que mientras hubiere proporcion entre los errores y las diferencias indicadas, tendremos $c:d::x-a:x-b$, y por consiguiente $x=\frac{bc-ad}{c-d}$. Luego se ha de multiplicar cada número supuesto por la equivocacion que corresponde al otro, y dividir la diferencia de los dos productos por la de los errores quando llevaren un mismo signo; y si los dos errores llevaren signos contrarios, se partirá la suma de los productos por la suma de los errores. Porque si fuera d, v. gr. negativa, la fórmula sería $x=\frac{bc+ad}{c+d}$.

Quando ninguno de los dos números supuestos es el que se busca, se puede abreviar la operacion, averiguando qué correccion se le debe hacer para que salga el número que se busca. Para lo qual, llamemos y esta correccion; d, la menor equivocacion; b, el número del qual resulta, y quédese lo demas lo propio que antes. Es constante que si fuese b menor que x, tendrémos $b+y=x=\frac{bc-ad}{c-d}$. Luego en este caso $y=\frac{(b-a)d}{c-d}$; pero si fuese b mayor que x, sería $b-y=x=\frac{bc-ad}{c-d}$, é $y=\frac{(a-b)d}{c-d}$. Quiero decir que en ambos casos se ha de multiplicar la diferencia de los dos números supuestos por la menor equivocacion, y dividir su producto por la diferencia de los errores quando son de un mismo signo, ó por su suma quando llevan signos contrarios. Aclarémos esto con un par de exemplos.

I. *He recibido un oficial holgazan, y, con la mira de estimularle al trabajo, le ofrezco 15 reales cada dia que trabaje, con la condicion de que cada*

da dia que huelgue no solo no le daré nada, sino que él me dará 8 reales. Ajústole la cuenta al cabo de 15 dias, y alcanza 110 reales; ¿quantos dias trabajó?

Supongo que trabajó 6 dias; en este supuesto no le tocará cobrar mas que 18 reales. Hay, pues, un error de 92 *por falta*, y es señal de que ha trabajado mas de 6 dias.

Supongo despues que ha trabajado 12 dias; en este supuesto alcanzaría 156 reales. Hay, pues, un error de 46 *por sobra*, y por consiguiente los errores llevan signos diferentes.

Dispongo, pues, los números supuestos, y las diferencias como sigue:

6	12
−92	+46

Multiplico el primer número por la segunda equivocacion, y el segundo por la primera, y dividiendo la suma 1380 de los dos productos por 138 suma de los dos errores, saco 10 que expresa los dias que el oficial trabajó.

Si despues de verificar con el primer supuesto que el oficial trabajó mas de 6 dias, supusiera que trabajó 9, sería tambien negativo el segundo error 23, y en este caso

6	9
−92	−23

Multiplicando los números por los errores, conforme se dixo, y dividiendo la diferencia 690 de los productos, por la diferencia 69 de los dos errores, sacaría tambien 10.

II.° *De dos jugadores el mas diestro ha puesto 12 reales contra 8 cada juego; despues de 10 juegos, el otro le paga 20 reales. ¿Quantos juegos ganó el primero?*

Si

Si hubiera ganado 6, el otro hubiera ganado 4 juegos, y estarian en paz; hay, pues, un error de —20. Si hubiera ganado 8 juegos, el otro hubiera tenido que darle 40 reales. Hay, pues, una equivocacion de +20.

6	8
—20	+20

Parto 280 suma de los productos, por 40 suma de los errores, y saco que el segundo jugador mas diestro ganó 7 juegos.

Como ninguno de los dos números supuestos es el verdadero, y la diferencia es 2, la multiplico por —20 ó +20, pues son iguales los dos errores, y no hago caso de sus signos al executar la multiplicacion y la division, y parto el producto 40 por la suma de las equivocaciones que tambien es 40; la correccion es aquí 1, añadida á 6, ó quitada de 8, dá 7. El cociente señala la correccion que cada número necesita para que sea el verdadero, añadiéndola al menor, ó restándola del mayor.

124 Cuestion 10. *Declarar los fundamentos y la práctica de la regla de Aligacion*, ó en otros términos.

Se han comprado dos calidades de un mismo género, la una A, *cuyo precio es* m; *la otra* B, *cuyo precio es* n; *se pregunta ¿á que precio se ha de vender la mezcla para no perder ni ganar?*

Llamo x este precio medio. Es constante que la suma de los géneros ha de ser á la suma de su valor, como una parte de la mezcla á su valor ó precio, que llamaremos x. Luego $A+B : Am+Bn :: 1 : \frac{Am+Bn}{A+B} = x$.

Supongamos que se me pregunte *¿á como se ha de vender una mezcla hecha con* 6 *marcos de plata de á* 200 *reales el marco, y con* 12 *de á* 144 *reales para no perder ni ganar?* Aquí tenemos $A = 6$,

B

$B=12$, $m=200$, $n=144$, $Am+Bn=2928$, $A+B=18$; luego $\frac{Am+Bn}{A+B}=\frac{2928}{18}=162\frac{2}{3}$.

125 Cuestion II. *Dados los precios de dos géneros* A *y* B, *hallar en que proporcion se han de mezclar unos con otros para venderlos á un precio medio* m.

Sean $m+a$, y $m-d$ los precios de los dos géneros; x é y las porciones que de cada uno han de entrar respectivamente en la mezcla. La misma cuestion hace patente que si multiplicamos la porcion de cada género que ha de entrar en la mezcla por su precio, y sumamos los productos, su suma ha de ser igual á la suma de las dos porciones multiplicadas por el precio medio; quiero decir, que si escribimos las porciones, el precio de los géneros, y el precio medio de este modo.

$$m\begin{cases} m+a \\ m-d \end{cases}\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

Tendremos $(m+a)x+(m-d)y=(x+y)m$, ó $mx+ax+my-dy=mx+my$, de donde se saca $ax=dy$. Y como se viene á los ojos que de la cantidad que mas vale he de tomar menos que el precio medio, podemos hacer $x=d$, y tendré $y=a$; luego las cantidades se podrán escribir de este modo.

$$m\begin{cases} m+a \\ m-d \end{cases}\begin{matrix} d \\ a \end{matrix}$$

Y significa que de la cantidad de mas valor he de tomar tanto como expresa la diferencia que va del precio medio al precio menor, y de la menor tanto como

mo la diferencia que va del precio medio al precio mayor.

Si quisiéramos *averiguar* v. gr. *qué porcion de vino de á* 15 *reales la arroba se ha de mezclar con vino de á* 8 *reales la arroba, para hacer una mezcla que pueda venderse á* 12 *reales*, tendríamos $m = 12$, $m + a = 15$, $m - d = 8$, $d = 4$, y $a = 3$.

Por consiguiente he de tomar

$$12 \begin{cases} 15 \,..\, 4 \\ 8 \,..\, 3 \end{cases}$$

tres arrobas del vino de á 8, y 4 del vino de á 15 reales.

Si la mezcla se hubiese de hacer con vino de á 15, *de á* 8, *y de á* 10 *reales*; dispondria las cantidades de este modo:

$$12 \begin{cases} 15 \,..\, 4 \,..\, 2 = 6 \\ 10 \,..\, 3 \\ 8 \,..\, 3 \end{cases}$$

Obrando primero como si no hubiera mas que vino de á 15, y vino de á 8, y despues como si no le hubiera mas que de á 15, y de á 10, sacaría que se deberían tomar 6 arrobas del vino de á 15, 3 del de á 10, y 3 del de á 8.

II. *Un panadero quiere hacer con cebada, centeno y trigo pan que pueda vender á* 28 *maravedis la libra. Tiene* 8½ *celemines de trigo con los quales haria pan de á* 36 *maravedis la libra. El pan hecho con centeno solo le saldria á* 18 *maravedis, y el que haria con cebada le saldria á* 9 *maravedis. ¿Que porcion ha de mezclar de cebada y centeno con los* 8½ *celemines de trigo para que el pan le salga á* 28 *maravedis la libra?*

$$28 \begin{cases} 36 \,..\, 19 \,..\, 10 = 29 \\ 18 \,..\, 8 \\ 9 \,..\, 8 \end{cases}$$

Teniendo presente lo dicho hasta aquí, sacaré que necesitaría el panadero 29 celemines de trigo, 8 de cebada, y 8 de centeno.

Pero como el panadero no tiene mas que $8\frac{1}{2}$ celemines de trigo, necesitará de los demas granos menos á proporcion que si tuviera los 29 celemines. Dirémos, pues, $29 : 8\frac{1}{2} :: 8 : \frac{(8\frac{1}{2})8}{29} = \frac{68}{29} = 2\frac{10}{29}$ celemines de centeno, y otros tantos de cebada.

III. *¿Que porciones he de tomar de tres castas de café que cuestan el uno* 10 *reales la libra, el otro* 7, *y el último* 3, *para componer la cantidad de* 64 *libras que se pueda dar á* 8 *reales la libra?*

$$8\begin{cases}10\,..\,5\,..\,1=6\\ 7\,..\,2\\ 3\,..\,2\end{cases}$$

Hecho esto, diremos: la suma de las diferencias es á la cantidad de la mezcla, como cada diferencia es á la cantidad que de ella ha de entrar en la mezcla.

$10 : 64 :: 6 : \frac{64\times6}{10} = 38\frac{2}{5}$ lib. del de á 10.

$10 : 64 :: 2 : \frac{64\times2}{10} = 12\frac{4}{5}$ lib. del de á 7, y del de á 3.

126 Cuestion 12. *Manifestar los fundamentos, y la práctica de la regla de interes.*

Llámase regla de interes la que determina lo que se debe pagar por alguna porcion de dinero prestado con ciertas condiciones. Hay dos especies de interes; es á saber, el *simple*, y el *compuesto*: el primero es el que se paga por el principal; el segundo es el que se paga por el principal y los intereses que dexan de pagarse. Esto supuesto, lo que acerca de esta regla nos proponemos averiguar va cifrado en los quatro casos siguientes.

Da-

I. *Dado el capital, el tiempo que está puesto á interes, y el tanto por ciento que ha de ganar; hallar la suma que componen al cabo de un tiempo determinado el capital y los intereses juntos.*

Llamemos el capital p; el tiempo, t; r, el interes que dá un real cada año; s, la suma que buscamos. Dirémos, pues: si un real dá r interes en un año ¿quanto dará el principal p? ó $1 : r :: p : pr$: será, pues, pr el interes que dará cada año el capital p. Despues diremos: si en un año p da el interes pr ¿quanto dará al cabo del tiempo t? ó $1 : rp :: t : prt$: serán, pues, prt los intereses que dará el principal p al cabo del tiempo t; por consiguiente al cabo del tiempo t, será $s = p + prt$.

De aquí se sacará $p = \frac{s}{1+rt}$, $t = \frac{s-p}{pr}$, $r = \frac{s-p}{pt}$.

Supongamos que un usurero ha prestado 15600 *reales á* 8 *por ciento cada año, y que queramos saber quanto tendrá que cobrar al cabo de cinco años por el capital y los intereses caidos.*

Aquí $p = 15600$; como el interes es á 8 por ciento, será $r = 0{,}08$, porque diremos $100 : 8 :: 1 : r = \frac{8}{100} = 0{,}08$; $t = 5$; luego será $s = 15600 + 15600 \times 0{,}08 \times 5 = 21840$.

Si en el supuesto de haberse pagado al cabo de 5 años por el capital y los intereses á 8 por ciento, la suma de 21840 reales, se nos preguntará quanto fué el capital, haríamos las substituciones correspondientes en la fórmula $p = \frac{s}{1+rt}$, y sacaríamos $p = 15600$ reales.

II. *Dada una suma de dinero que se ha de pagar cada año, el número de años que dexa de pagarse, el interes anual que devenga por razon del atraso; hallar quanto se ha de pagar al cabo de dicho tiempo por la renta y los intereses.*

Llamarémos a la suma propuesta; t, el tiempo que

que dexa de pagarse; r, lo que gana un real cada año; s, la suma que buscamos.

Con estos datos discurrirémos del modo siguiente: una vez que la renta no se paga hasta cumplido el año, el primer año no devenga interes alguno, luego el interes del primer año es 0; al cabo del segundo año el interes será ar; al cabo del tercer año $2ar$; y al cabo de t años será $(t-1)ar$. Por consiguiente, al cabo de t años se deberá la suma de los intereses $0+ar+2ar+3ar \ldots . +(t-1)ar$, mas tantas veces la cantidad a quantos son los años que dexó de pagarse, ó ta. Pero la suma de $0+ar+2ar+3ar \ldots . +(t-1)ar$ es $\frac{t(t-1)ar}{2}$; luego al cabo de t años se deberá $\frac{t(t-1)ar}{2}+at=\frac{(t-1)r+2}{2}\times ta$, ó $s=\frac{(t-1)r+2}{2}\times ta$.

Luego $a=\frac{2s}{[(t-1)r+2]t}$, $t=\sqrt{\left[\frac{2s}{ar}+\left(\frac{2-r}{2r}\right)^2\right]}-\frac{2-r}{2r}$, $r=\frac{2s-2ta}{(t-1)ta}$.

Un negociante tiene que pagar á otro cien doblones cada año; pero como le ha de incomodar cumplir, consigue de su acreedor que no le pida nada por espacio de ocho años, ofreciendo que le pagará todos los atrasos con el interes á razon de 5 por 100 ¿quanto deberá?

Con hacer las substituciones correspondientes á este caso, sacaremos $s=(0{,}05\times 7+2)\times\frac{800}{2}=940$.

III. *Dado un capital, el tiempo que queda puesto á ganancias, y el interes anual; hallar quanto monta al cabo de dicho tiempo el capital junto con los intereses, á interes compuesto.*

Llamo a el capital; r, el interes que dá un real cada año; t, el tiempo. Luego será $1+r=R$ lo que se deberá al cabo de un año por un real, y el interes que dá. Para hallar lo que se deberá al cabo del segundo año por un real y sus intereses, á interes compuesto, hemos de considerar que á principios de este segundo año el principal puesto á ganancias es

1

$1+r$, ó R, pues siendo la cuestion de interes compuesto, los intereses r han de ser parte del principal el segundo año. Dirémos, pues: si 1 dá $1+r$ ó R al cabo de un año ¿quanto dará R en el mismo tiempo? ó $1 : R :: R : R^2$, cuyo quarto término es lo que se deberá á fines del segundo año por el capital y las ganancias, á interes compuesto. Haciendo la misma consideracion, hallarémos que en el mismo supuesto será R^3 lo que se deberá al cabo del tercer año, y que por consiguiente al cabo de t años, la suma del capital, siendo este un real, y de los intereses á interes compuesto será R^t.

Luego para hallar lo que será la suma del capital, é intereses al cabo de t años, siendo a el principal, á interes compuesto, esto es, en el supuesto de agregarse cada año los intereses al capital, diremos: si al cabo de t años un real puesto á interes compuesto dá R^t por el capital y los intereses ¿quanto dará a en los mismos supuestos, ó $1 : R^t :: a : aR^t$.

Luego $s = aR^t$; $a = \frac{s}{R^t}$; $R^t = \frac{s}{a}$, de donde

sale, por lo dicho de los logaritmos en la Arismética, $tL.R = L.s - La$, y $t = \frac{L.s - L.a}{L.R}$; $L.R = \frac{L.s - L.a}{t}$.

Supongamos que parte del caudal de un pupilo consiste en una suma de 20000 pesos que su tutor ha puesto á ganancias á 5 por 100. Al cabo de un año el sugeto que tenia esta suma la vuelve pagando el interes estipulado. El tutor halla en el instante proporcion de emplear dicha cantidad al mismo interes, y forma un nuevo capital con los 20000 pesos, y el interes que dieron el primer año, y coloca este nuevo capital. Emplea del mismo modo á prin-

cipios del tercer año todo lo que cobró á fines del segundo, y prosigue á este tenor por espacio de seis años; veamos lo que ha de cobrar al cabo de este tiempo.

En este caso $a=20000$; $t=6$ años; r es el interes simple de un peso; $R=1$ peso $+r$, esto es un peso con el interes que dá en un año. Para sacar el valor de R, hemos de averiguar primero el de r, diciendo $100 : 5 :: 1 : 0,05 = r$; luego $R = 1 + r = 1,05$. Luego haciendo las substituciones correspondientes en la fórmula $s=aR^t$ saldrá $s=20000 \times (1,05)^5 =$ $20000 \times 1,3401 = 26802$ pesos.

IV. *Dada una cantidad que se ha de pagar cada año, el tiempo que dexa de pagarse, y el interes; hallar quanto se deberá al cabo de un tiempo dado por los atrasos é intereses, á interes compuesto.*

Llamemos a la suma anual; t, el tiempo que dexa de pagarse; r, el interes que dá un real en un año; $R = 1+r$, la suma de un real y del interes que dá; s, la suma que se busca.

Lo que se debe al cabo del primer año es a; lo que se deberá al cabo del segundo es a, y el interes que dá a en un año, cuyo interes se halla con decir $1 : 1+r$ ó $R :: a : aR$; al cabo del segundo año se deberá $a+aR$.

Por consiguiente al principio del tercer año hemos de considerar que la cantidad puesta á ganancias es $a+aR$; luego al fin del tercer año habrá que cobrar la renta anual a, y los intereses de a y aR; como los de a son aR, y los de aR son aR^2 (pues $1 : R :: a : aR$, y $1 : aR :: R : aR^2$) al cabo del tercer año la deuda será $a+aR+aR^2$, y al cabo de t años será $a+aR+aR^2+ .. aR^{t-1}$ la deuda, ó $a \times (1+R+R^2+R^3 + \ldots R^{t-1})$ que es una progresion geométrica,

cu-

cuya suma es $\frac{R\times R^{t-1}-1}{R-1}=\frac{R^t-1}{r}$, y será por lo mismo $\frac{R^t-1}{r}\times a=s$ la deuda al cabo de t años.

Luego $a=\frac{rs}{R^t-1}$, $R^t=\frac{rs}{a}+1$, ó $t=\frac{L.(\frac{rs}{a}+1)}{Log. R.}$;

y $L.R=\frac{L.(\frac{rs}{a}+1)}{t}$.

Supongamos que la renta anual sea de 2400 pesos, la qual dexa de pagarse por espacio de 8 años, y que está estipulado que se pagará un quatro por ciento cada año; con hacer las substituciones correspondientes sacaremos que la suma $s=22140$ pesos, con muy corta diferencia.

127 Cuestion 13. *Dadas en una progresion arismética tres de estas cinco cantidades, el número de los términos* n, *el primero* a, *el último* u, *la diferencia* d, *y su suma* s, *hallar las otras dos.*

	1	$\frac{na+nu}{2}=s$ } (progr. arism.)
	2	$\frac{u-a}{n-1}=d$ } se probó (108)
$2\times(n-1)$	3	$u-a=nd-d$
$3+d$	4	$u-a+d=nd$
$4\div d$	5	$\frac{u-a+d}{d}=n$, número de los términos
$1\times(2)$	6	$na+nu=2s$
$6-na$	7	$nu=2s-na$
$7\div n$	8	$\frac{2s-na}{n}=u$, último término
$6-nu$	9	$na=2s-nu$

$9 \div n$	10	$\frac{2s - nu}{n} = a$, primer término.
$6 \div (a+u)$	11	$\frac{2s}{a+u} = n$, número de los términos
$5 = 11$	12	$\frac{u-a+d}{d} = \frac{2s}{a+u}$
$12 \times (a+u)$	13	$\frac{uu-aa}{d} + a + u = 2s$
$13 \div (2)$	14	$\frac{uu-aa}{2d} + \frac{a+u}{2} = s$, suma de la progr.
$14 \times 2d$	15	$uu - aa + ad + ud = 2sd$
$15 - ad$	16	$uu - aa + ud = 2sd - ad$
$16 - ud$	17	$uu - aa = 2sd - ad - ud$
$17 \div (2s - a - u)$	18	$\frac{uu-aa}{2s-a-u} = d$, diferencia
$3 + a$	19	$nd - d + a = u$, último término.
$19 + d$	20	$nd + a = u + d$
$20 - nd$	21	$u + d - nd = a$, primer término.

128 Cuestion 14. *Supuesto lo enseñado* (Arism.) *acerca de la progresion geométrica; hallar su suma, su exponente, su primer término y el último.*

Sea como antes a el primer término de la progresion, u el último, q el exponente, s su suma. Será $s-u$ la suma de los antecedentes, $s-a$ la suma de los consecuentes.

	1	$a : aq :: s-u : s-a$ (Arism.)
$1 \times$	2	$sa - aa = aqs - aqu$ multipl. extr. y med.
$2 \div a$	3	$s - a = qs - qu$
$3 + qu$	4	$s + qu - a = qs$
$4 - s$	5	$qu - a = qs - s$
$5 \div (q-1)$	6	$\frac{qu-a}{q-1} = s$, suma de la progresion.
$3 \div (s-u)$	7	$\frac{s-a}{s-u} = q$, exponente.
$5 + a$	8	$qu = qs + a - s$
$8 \div q$	9	$\frac{qs+a-s}{q} = u$, último término.
$4 + a$	10	$s + qu = qs + a$
$10 - qs$	11	$s + qu - qs = a$, primer término.

Es-

Estas dos primeras cuestiones se pueden resolver de otros muchos modos, y sacando equaciones que hagan al intento.

129 Cuestion 15. *Hallar dos números cuya suma es 25, y el menor es al mayor como 2 á 3.*

Sea	1	u el mayor
	2	x el menor
	3	$x : u :: 2 : 3$ (cuestion)
$3\times$	4	$3x = 2u$
$4\div(2)$	5	$u = \frac{3}{2}x$
	6	$u+x=x+\frac{3}{2}x=25$ cuestion
$6\times(2)$	7	$2x+3x=5x=50$
$7\div(5)$	8	$x=\frac{50}{5}=10$, número menor
$5+8$	9	$u=\frac{3}{2}x=15$, número mayor.

De otro modo

Sea	1	$u =$ al número mayor, s suma de los dos $=25$, el menor será $=s-u$
	2	$2 : 3 :: s-u : u$ (cuestion)
$2\times$	3	$2u=3s-3u$
3 trans.	4	$5u=3s$
$4\div5$	5	$u = \frac{75}{5} = 15$, número mayor.
	6	$s-u=10$, número menor.

130 Cuestion 16. *Un hombre tenia una porcion de quartos, pero no sé quantos. Sí sé que ha dado á A la mitad, á B la quarta parte, á C la octava, y á D la dozava parte; le han quedado tres quartos, ¿quantos quartos tenia aquel hombre?*

Sea	1	$x =$ al número de los quartos.
	2	$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{12}=x-3$ (cuestion)
2 reduc.	3	$\frac{23}{24}x=x-3$
3 transp.	4	$\frac{1}{24}x = 3$
$4\times(24)$	5	$x = 72$

Cues-

131 Cuestion 17. *He recibido un oficial con la condicion de que por cada dia que trabaje le daré 12 reales, y él me dará 8 reales por cada dia que huelgue. Al cabo de 390 dias ajustamos cuentas, y salimos en paz, ¿quantos dias trabajó el oficial, y quantos holgó?*

Sea	1	x los dias que trabajó, $a=390$; será $a-x$ los dias que holgó.
	2	$12x=(390-x)\times 8=3120-8x$ (cuestion)
2 transp.	3	$20x=3120$
$3\div 20$	4	$x=\frac{3120}{20}=156$, dias que trabajó
1	5	$a-x=234$, dias que holgó.

132 Cuestion 18. *Hay que repartir entre unos quantos muchachos y muchachas 37 quartos; si se dán á cada muchacho 3 quartos, y 2 á cada muchacha no falta nada; pero si se dán 3 quartos á cada muchacha, y 2 á cada muchacho, faltan 4 quartos ¿quantos son los muchachos, y quantas las muchachas?*

Sean	1	$u=$ los muchachos, x las muchachas, $a=37$, $b=4$
	2	$3u+2x=a$ } (cuestion)
	3	$2u+3x=a-b$ } (cuestion)
$2\times(3)$	4	$9u+6x=3a$
$3\times(2)$	5	$4u+6x=2a-2b$
$4-5$	6	$5u=a+2b$
$6\div(5)$	7	$u=\frac{a+2b}{5}=9$, número de muchachos
$2-3u$	8	$2x=a-3u$
$8\div(2)$	9	$x=\frac{a-3u}{2}=5$, número de muchachas.

133 Cuestion 19. *Un hombre á quien se pregunta la hora que es, responde: que la hora es entre 8 y 9, y que la mano de las horas y la de los minutos están juntas ¿que hora será?*

Sea

Sea	1	$x=$ la hora; $b=8$, $c=12$, $d=1$
	2	Ya que las dos manos dividen la hora, y toda la circunferencia en la misma proporcion, será $c:x::d:x-b$
$2\times$	3	$cx-cb=dx$
3 trans.	4	$cx-dx=cb$
$4:(c-d)$	5	$x=\frac{cb}{c-d}=\frac{96}{11}=8^{h}\ 43'\ 38\frac{2''}{11}$.

134 Cuestion 20. *Un hombre dá al primer pobre que encuentra $\frac{1}{6}$ de los quartos que tiene, y quatro mas; al segundo le dá $\frac{1}{6}$ de los quartos que le quedan, y 8 mas; al tercero $\frac{1}{6}$ de lo que le queda, y 12 quartos mas; y va dando quatro quartos mas á cada pobre, hasta quedarse sin ninguno. Se halla que entonces ha tocado á cada pobre el mismo número de quartos ¿quantos eran los quartos del hombre, y quantos los pobres?*

Llamo	1	x los quartos que tenia el hombre
	2	$\frac{x}{6}+4=$ los quartos dados al primer pobre, (cuestion)
1—2	3	$\frac{5}{6}x-4=$ los que le quedan al hombre
$3\div(6)$	4	$\frac{5}{36}x-\frac{4}{6}=\frac{1}{6}$ de los que quedan
$4+(8)$	5	$\frac{5}{36}x-\frac{4}{6}+8=$ los quartos del seg. pobre
$2=5$	6	$\frac{x}{6}+4=\frac{5}{36}x-\frac{4}{6}+8$ (cuestion)
$6\times(36)$	7	$6x+144=5x-24+288$
7 transp.	8	$x=120$, los quartos del hombre
2,	9	$20+4=24=$ la parte de cada pobre
8,9	10	$\frac{120}{24}=5=$ el número de los pobres.

135 Cuestion 21. *Hay tres números tales, que el primero con $\frac{1}{3}$ de los otros dos compone 14; el segundo con $\frac{1}{4}$ de los otros dos compone 8; el tercero con $\frac{1}{5}$ de los otros dos compone 8 ¿quales son estos números?*

Lla-

Llamo	1	u, x, y los números	
	2	$u + \frac{x+y}{3} = 14$	(cuestion)
	3	$x + \frac{u+y}{4} = 8$	(cuestion)
	4	$y + \frac{u+x}{5} = 8$	(cuestion)
$2\times(3)$	5	$3u+x+y=42$	
$3\times(4)$	6	$4x+u+y=32$	
$5-6$	7	$2u-3x=10$	
$5\times(5)$	8	$15u+5x+5y=210$	
$4\times(5)$	9	$u+x+5y=40$	
$8-9$	10	$14u+4x=170$	
$7\times(4)$	11	$8u-12x=40$	
$10\times(3)$	12	$42u+12x=510$	
$11+12$	13	$50u=550$	
$13\div 50$	14	$u=11$	
7 transp.	15	$3x=2u-10$	
$15\div(3)$	16	$x=\frac{2u-10}{3}=4$	
5 trasl.	17	$y=42-3u-x=5.$	

136 Cuestion 22. *Hallar dos números cuya suma es* 8, *y la diferencia de sus quadrados es* 16.

Sea	1	$x =$ el número menor, $a=8$, $b=16$
	2	$a-x =$ al número mayor
$1\,(\ )^2$	3	$xx =$ al quadrado del número menor
$2\,(\ )^2$	4	$aa-2ax+xx =$ al quadrado del mayor
$4-3$	5	$aa-2ax=b$ (cuestion)
5 trasl.	6	$2ax=aa-b$
$6\div 2a$	7	$x=\frac{aa-b}{2a}=3$, número menor.
2	8	$a-x=5$, número mayor.

137 Cuestion 23. *Hallar tres números tales, que la suma del primero y segundo es* 9, *la suma del primero y tercero es* 10, *y la suma del segundo y tercero es* 13.

Lla-

Llamo	1	u, x, y los tres números, $a=9$, $b=10$, $c=13$
	2	$u+x=a$
	3	$u+y=b$ (cuestion)
	4	$x+y=c$
$2-u$	5	$x=a-u$
$3-u$	6	$y=b-u$
$4+5+6$	7	$a-u+b-u=c$
7 trasl.	8	$2u=a+b-c$
$8\div(2)$	9	$u=\frac{a+b-c}{2}=3$
5,	10	$x=a-u=6$
6,	11	$y=b-u=7$.

138 Cuestion 24. *Dos correos que el uno* A *anda* 10 *millas por hora, y el otro* B *anda* 8, *salen encontrados á un mismo tiempo de dos Ciudades distantes* 360 *millas una de otra ¿quanto andará cada uno de los dos antes de encontrarse?*

Supongo	1	que *A* ande x millas, entonces *B* andará $360-x$
	2	$x : 360-x :: 10 : 8$ (proporcion)
$2\times$	3	$8x=3600-10x$
3 trasl.	4	$18x=3600$
$4\div(18)$	5	$x=\frac{3600}{18}=200$, camino de *A*.
1	6	$360-x=160=$ camino de *B*.

139 Cuestion 25. *Un muchacho compra manzanas, y le dan* 10 *por un quarto; compra tambien peras, y le dan* 25 *por* 2 *quartos. Entre peras y manzanas ha comprado* 100 *que le han costado* $9\frac{1}{2}$ *quartos ¿quantas manzanas, y quantas peras ha comprado?*

Sea	1	$x=$ las manzanas, serán $100-x=$ las peras.
	2	$10 : 1^{qto} :: x : \frac{x}{10}$, precio de las manzanas (cuestion)

	3	$25 : 2^{\text{qtos}} :: 100-x : \frac{200-2x}{25}$ precio de las peras.	(cuestion)
	4	$\frac{x}{10} + \frac{200-2x}{25} = 9\frac{1}{2}$	
$4 \times (50)$	5	$5x+400-4x=475$	
5 trasl.	6	$x=75$, las manzanas	
	7	$100-x=25$, las peras.	

140 Cuestion 26. *Un Vinatero quiere mezclar vino de á 10 reales la arroba, con vino de á 6 reales basta componer 100 arrobas que pueda vender á 7 reales la arroba ¿que porcion de cada vino ha de entrar en la mezcla?*

Sean	1	u las arrobas de á 10 reales, x las de á 6, $b=10$, $c=6$, $m=108$, $f=7$	
	2	$1 : b :: u : ba$, valor de u arrob.	(propor.)
	3	$1 : c :: x : cx$, valor de x arrob.	
	4	$bu+cx=mf$	(cuestion)
	5	$u+x=m$	
$5-u$	6	$x=m-u$	
4, y 6	7	$bu+cm-cu=mf$	
7 trasl.	8	$bu-cu=fm-cm$	
$8 \div (b-c)$	9	$u=\frac{fm-cm}{b-c}$	
6	10	$x=\frac{bm-fm}{b-c}$.	

141 Cuestion 27. *Un Cambista trueca 6 escudos y 2 sueldos de Francia por 45 escalines Ingleses, y 9 escudos y 5 sueldos de Francia por 76 escalines ¿quanto vale el escudo de Francia, y quanto el sueldo en moneda Inglesa?*

Supongo	1	$x=$ valor del escudo, $y=$ valor del sueldo, $q=$ valor del sueldo de Francia; $a=6$, $b=2$, $d=9$, $e=5$, $c=45$, $f=76$

	2	$ax+by=c$ } (cuestion)
	3	$dx+ey=f$ }
$2\times e$	4	$eax+eby=ec$
$3\times b$	5	$bdx+eby=bf$
$4-5$	6	$aex-bdx=ec-bf$
$-6:(ae-bd)$	7	$x=\frac{ec-bf}{ae-bd}=6\frac{1}{12}$
2	8	$\frac{ec-bf}{ae-bd}a+by=c$
8 trasl.	9	$by=c-\frac{ec-bf}{ae-bd}a=\frac{bfa-bde}{ae-bd}$
$9\div b$	10	$y=\frac{af-dc}{ae-bd}=4\frac{1}{4}$.

142 Cuestion 28. *Dos oficiales* A *y* B *trabajando juntos en una misma obra han ganado* 40 *reales en* 6 *dias; otros dos* A *y* C *juntos han ganado* 54 *reales en* 9 *dias; otros dos* B *y* C *juntos han ganado* 80 *reales en* 15 *dias ¿que jornal ha sacado cada uno de los oficiales?*

Sea	1	x, y, z respectivamente el jornal que cada oficial ha sacado.
	2	$6x+6y=40$ }
	3	$9x+9z=54$ } (cuestion)
	4	$15y+15z=80$ }
$2\div(6)$	5	$x+y=6\frac{2}{3}$
$3\div(9)$	6	$x+z=6$
$4\div(15)$	7	$y+z=5\frac{1}{3}$
$5-6$	8	$y-z=\frac{2}{3}$
$7+8$	9	$2y=6$
$9\div(2)$	10	$y=3$
5	11	$x=6\frac{2}{3}-y=3\frac{2}{3}$
7	12	$z=5\frac{1}{3}-y=2\frac{1}{3}$.

143 Cuestion 29. *Hallar tres números tales, que* $\frac{1}{2}$ *del primero,* $\frac{1}{3}$ *del segundo, y* $\frac{1}{4}$ *del tercero compongan* 62; *que* $\frac{1}{3}$ *del primero,* $\frac{1}{4}$ *del segundo, y* $\frac{1}{5}$ *del tercero compongan* 47; *y últimamente que* $\frac{1}{4}$ *del pri-*

primero, $\frac{1}{5}$ del segundo, y $\frac{1}{6}$ del tercero compongan 38.

Sean	1	x, y, z los tres números; $a = 62$, $b = 47$, $c = 38$,
	2	$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = a$ (cuestion)
	3	$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = b$ (cuestion)
	4	$\frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = c$ (cuestion)
2×(2.3.4)	5	$12x+8y+6z = 24a$
3×(3.4.5)	6	$20x+15y+12z = 60b$
4×(4.5.6)	7	$30x+24y+20z = 120c$
5×(2)	8	$24x+16y+12z = 48a$
8—6	9	$4x+y = 48a-60b$
7×(3)	10	$90x+72y+60z = 360c$
6×(5)	11	$100x+75y+60z = 300b$
11—10	12	$10x+3y = 300b-360c$
9×(3)	13	$12x+3y = 144a-180b$
13—12	14	$2x = 144a-180b-300b+360c$
14÷(2)	15	$x = 72a-240b+180c = 24$
9	16	$y = 48a-60b-4x = 60$
2	17	$x = (a-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y) \times 4 = 120.$

144 Cuestion 30. *Partir* 90 *en tres partes tales, que el duplo de la primera* +40, *el triplo de la segunda* +20, *y el quádruplo de la tercera* +10 *sean tres cantidades iguales una con otra.*

Sean	1	x, y, z las tres partes, $a=90$, $b=40$, $c=20$, $d=10$
	2	$x+y+z = a$ (cuestion)
	3	$2x+b = 3y+c$ (cuestion)
	4	$2x+b = 4z+d$ (cuestion)
2×(12)	5	$12x+12y+12z = 12a$
3×(4)	6	$8x+4b = 12y+4c$
4×(3)	7	$6x+3b = 12z+3d$
+5+6+7	8	$26x+12y+12z+7b = 12a+12y+12z+4c+3d$

8 trasl.	9	$26x = 12a+4c+3d-7b$
$9 \div (26)$	10	$x = \frac{12a+4c+3d-7b}{26} = 35$
3 trasl.	11	$3y = 2x+b-c$
$11 \div (3)$	12	$y = \frac{2x+b-c}{3} = 30$
2 trasl.	13	$z = a-x-y = 25.$

145 Cuestion 31. *Hallar tres números tales, que el primero mas $\frac{1}{2}$ de los otros dos; el segundo mas $\frac{1}{3}$ de los otros dos, y el tercero mas $\frac{1}{4}$ de los otros dos, compongan una misma suma 51.*

Sean	1	x, y, z los tres números, $51 = a$
	2	$x + \frac{y+z}{2} = a$ (cuestion)
	3	$y + \frac{x+z}{3} = a$ (cuestion)
	4	$z + \frac{x+y}{4} = a$ (cuestion)
$2 \times (2)$	5	$2x+y+z = 2a$
$3 \times (3)$	6	$3y+x+z = 3a$
$4 \times (4)$	7	$4z+x+y = 4a$
$7-6$	8	$-2y+3z = a$
$6 \times (2)$	9	$6y+2x+2z = 6a$
$9-5$	10	$5y+z = 4a$
$10 \times (3)$	11	$15y+3z = 12a$
$11-8$	12	$17y = 11a$
$12 \div (17)$	13	$y = \frac{11a}{17} = 33$
10 trasl.	14	$z = 4a-5y = \frac{13a}{17} = 39$
6 trasl.	15	$x = 3a-3y-z = \frac{5a}{17} = 15.$

146 Cuestion 32. *Tres compañeros* A, B, C *se reparten una suma de dinero; la parte de* A *tiene* 30 *reales mas que los $\frac{4}{7}$ de la suma de las partes de* B *y* C; *la parte de* B *tiene* 30 *reales mas que los $\frac{3}{8}$ de las partes de* A *y* C *juntas; la parte de* C *tiene* 30

reales mas que los $\frac{2}{9}$ de las partes de A y B juntas ¿quanto monta la parte de cada uno?

Sean	1	x, y, z las partes ; $a = 30$
	2	$x - \frac{4y+4z}{7} = a$ (cuestion)
	3	$y - \frac{3x+3z}{8} = a$ (cuestion)
	4	$z - \frac{2x+2y}{9} = a$ (cuestion)
$3 \times (7)$	5	$7x - 4y - 4z = 7a$
$3 \times (8)$	6	$8y - 3x - 3z = 8a$
$4 \times (9)$	7	$9z - 2x - 2y = 9a$
$5 \times (2)$	8	$14x - 8y - 8z = 14a$
$7 \times (4)$	9	$36z - 8x - 8y = 36a$
$6 + 8$	10	$+11x - 11z = 22a$
$6 + 9$	11	$-11x + 33z = 44a$
$10 + 11$	12	$22z = 66a$
$12 \div 22$	13	$z = 3a = 90$
10 trasl.	14	$11x = 22a + 11z$
$14 \div (11)$	15	$x = 2a + z = 5a = 150$
3 trasl.	16	$y = a + \frac{3}{8} \times (x + z) = 4a = 120.$

147 Cuestion 33. *De tres oficiales A,B,C, dos A,B trabajando juntos hacen en 8 dias una obra ; A y C juntos la hacen en 9 dias , y B, C juntos en 10 dias ¿en quantos dias la hará cada oficial trabajando solo?*

Sean	1	x, y, z la obra que hacen respectivamente cada oficial en un dia , $a =$ toda la obra.
	2	$8x + 8y = a$ (cuestion)
	3	$9x + 9z = a$ (cuestion)
	4	$10y + 10x = a$ (cuestion)
$2 \div (8)$	5	$x + y = \frac{a}{8}$
$3 \div (9)$	6	$x + z = \frac{a}{9}$
$4 \div (10)$	7	$y + z = \frac{a}{10}.$

5−6	8	$y-z=\frac{a}{8}-\frac{a}{9}=\frac{a}{72}$
8+7	9	$2y=\frac{a}{10}+\frac{a}{72}=\frac{82a}{720}$
9÷(2)	10	$y=\frac{41a}{720}$
5 trasl.	11	$x=\frac{a}{8}-y=\frac{49a}{720}$
7 trasl.	12	$z=\frac{a}{10}-y=\frac{31a}{720}$.

Una vez averiguado que parte de la obra hará cada oficial en un dia; se sabrá en quantos dias la hará trabajando solo, partiéndola toda por la que hace en un dia.

Luego a partido por $\frac{41a}{720}=\frac{720a}{41a}=\frac{720}{41}=17^{d}\ \frac{23}{41}$ expresará los dias que *B* gastará en hacer toda la obra; se sacará que *A* la hará en $14\frac{34}{49}$ dias, y *C* en $23\frac{7}{31}$ dias.

148 Cuestion 34. *Tres oficiales* A, B, C *trabajando juntos hacen una obra en* 9 *dias*; A, B y D *juntos la hacen en* 10 *dias*; A, C y D *juntos en* 11 *dias* ¿*en quantos dias la harán los quatro oficiales trabajando juntos*?

Sean	1	u, x, y, z la parte de la obra que hacen al dia cada oficial; $a=9$, $b=10$, $c=11$, $d=12$; la obra $=g$.
	2	$a\times(u+x+y)=g$ (cuestion)
	3	$b\times(u+x+z)=g$ (cuestion)
	4	$c\times(u+y+z)=g$ (cuestion)
	5	$d\times(x+y+z)=g$ (cuestion)
2÷a	6	$u+x+y=\frac{g}{a}$
3÷b	7	$u+x+z=\frac{g}{b}$
4÷c	8	$u+y+z=\frac{g}{c}$
5÷d	9	$x+y+z=\frac{g}{d}$

$6+7+8+9$	10	$3u+3x+3y+3z=\frac{g}{a}+\frac{g}{b}+\frac{g}{c}+\frac{g}{d}$
$10\div(3)$	11	$u+x+y+z=\frac{1}{3}\times\left(\frac{g}{a}+\frac{g}{b}+\frac{g}{c}+\frac{g}{d}\right)$, obra que harán en un dia los quatro oficiales juntos.

Partiendo, pues, por esta cantidad toda la obra g, será $\frac{3g}{\frac{g}{a}+\frac{g}{b}+\frac{g}{c}+\frac{g}{d}}=\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$ $=\frac{3abcd}{bcd+acd+abd+abc}=7\frac{1797}{2289}$, número de dias que se busca.

149. Cuestion 35. *Entre cinco compañeros* A, B, C, D, E *se ha de partir una suma de dinero, con la circunstancia que á* B *le han de tocar* 10 *reales ménos que á* A; *á* C, 16 *reales mas que á* B; *á* D, 5 *reales ménos que á* C; *y á* E 15 *reales mas que á* D. *Hecha la reparticion, se halla que á* E *le ha tocado tanto como* A *y* B *juntos; ¿que suma se ha repartido, y quanto ha tocado á cada compañero?*

Sea	1	x la parte de A	(cuestion)
	2	$x-10=$ parte de B	
	3	$x+6=$ parte de C	
	4	$x+1=$ parte de D	
	5	$x+16=$ parte de E	
	6	$x+16=2x-10$	
6 trasl.	7	$x=26$	

De aquí se sigue que las partes de los cinco compañeros son respectivamente 26, 16, 32, 27 y 42 reales, y la suma repartida 143 reales.

Cues-

150 Cuestion. 36. *De dos jugadores* A *y* B *gana* A *á* B 10 *onzas de oro, y se halla con tantas onzas como el otro, y* 6 *mas; entre los dos tienen* 40 *onzas; ¿quanto tiene cada uno?*

Sean	1	x las onzas de *A* quando empieza el juego
	2	$40-x=$ las onzas de *B* (cuestion)
	3	$x+10=$ el dinero de *A* acabado el juego
	4	$30-x=$ el dinero de *B*
	5	$x+10=30-x+6$ (cuestion)
5 trasl.	6	$2x=26$
$5\div(2)$	7	$x=\frac{26}{2}=13.$

151 Cuestion 37. *Hay dos cubas de igual cabida llenas de vino; de la suma se sacan* 34 *cántaras, y de la otra* 80; *queda entonces en la una doblada cantidad de cántaras de vino; ¿quantas cántaras caben en cada cuba estando llena?*

Sea	1	x la cantidad que se busca
	2	$x-34=$ lo que queda en la primer cuba } (cuestion)
	3	$x-80=$ lo que queda en la otra } (cuestion)
	4	$x-34=2\times(x-80)$
	5	$x-34=2x-160$
5 trasl.	6	$x=126$

152 Cuestion 38. *Un Tabernero ha mezclado vino de Valdepeñas con vino de Xetafe; la mitad de toda la cantidad* +25 *arrobas es de Valdepeñas;* $\frac{1}{3}$ —5 *arrobas es de Xetafe; ¿quantas arrobas hay de cada uno?*

Sea	1	x las arrobas que hay en toda la partida

	2	$\frac{x}{2}+25=$ arrobas de Valdepeñas	(cuestion)
	3	$\frac{x}{3}-5=$ arrobas de Xetafe.	
	4	$\frac{x}{2}+25+\frac{x}{3}-5=x$	
$4\times(2\times3)$	5	$3x+150+2x-30=6x$	
5 reducid.	6	$5x+120=6x$	
6 trasl.	7	$x=120.$	

153 Cuestion 39. *Se hace una lotería de* 100000 *cédulas, unas con números, que son las que ganan, y otras en blanco que no ganan nada. La mitad de las cédulas que ganan añadida á* $\frac{1}{3}$ *de las blancas componen* 35000; *¿quantas son las cédulas que ganan?*

Sea	1	x el número de las cédulas útiles.
	2	$100000-x=$ el número de las inútiles
	3	$\frac{x}{2}+\frac{100000-x}{3}=35000$ (cuestion)
$3\times(6)$	4	$3x+200000-2x=210000$
4 reduc.	5	$x=10000.$

154 Cuestion 40. *Se ha hecho una porcion de pólvora, en la qual entra salitre por* $\frac{1}{2}$ *de todo el peso* $+6$ *libras; de azufre* $\frac{1}{3}$ *de todo el peso* -5 *libras; y de carbon* $\frac{1}{4}$ *de todo el peso* -3 *libras; ¿quantas libras hay de cada ingrediente?*

Sea	1	x las libras de toda la pólvora.	
	2	$\frac{x}{2}+6=$ libras de salitre.	(cuestion)
	3	$\frac{x}{3}-5=$ libras de azufre.	
	4	$\frac{x}{4}-3=$ libras de carbon.	
$2+3+4$	5	$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}-2=x$	

$5\times(2.3.4)$	6	$12x+8x+6x-48=24x$
6 trasl. y red.	7	$2x=48$
$7\div(2)$	8	$x=\frac{48}{2}=24.$

155 Cuestion 41. *De dos jugadores* A *y* B, *gana* A *al principio del juego* 5 *onzas á* B, *y con esto tienen tanto dinero uno como otro; en el discurso del juego recobra* B *lo que perdió, y gana* 5 *onzas mas; con lo que tiene cinco veces mas dinero que* A; *¿quantas onzas tenia cada jugador quando se pusieron á jugar?*

Llamo	1	x las onzas de *A* al principio del juego	
	2	$x+10=$ las onzas de *B*.	(cuestion)
	3	$x+10+5=5\times(x-5)$ $=5x-25$	(cuestion)
3 trasl. y red.	4	$40=4x$	
$4\div(4)$	5	$x=10.$	

156 Cuestion 42. *Un mercader quiere mezclar* 56 *libras de té superior de á* 20 *reales la libra con té de inferior calidad de á* 14 *reales la libra, con ánimo de darlo todo á* 18 *reales la libra; ¿quantas libras ha de tomar del género inferior?*

Sea	1	x las libras que busco
	2	$1120=$ valor del té superior
	3	$14x=$ valor del género inferior
	4	$56+x=$ número de libras de la mezcla
	5	$(56+x).18=1008+18x=$ valor de toda la mezcla
	6	$1120+14x=1008+18x$
6 trasl. y red.	7	$112=4x$
$7\div(4)$	8	$x=\frac{112}{4}=28.$

 Cues-

157 Cuestion 43. *Un mercader ha comprado 30 libras de azucar de dos calidades diferentes, que entre las dos le han costado 19 pesos; el azucar de superior calidad le ha pagado á 10 reales la libra, y el inferior á 7 reales; ¿quantas libras ha comprado de cada suerte?*

Llamo	1	x al azucar superior
	2	$30-x$ el inferior
	3	$x\times 10+(30-x)\times 7=19\times 15^{rs}$ (cuestion)
$3\times$	4	$10x+210-7x=285$ reales
4 red.	5	$3x=75$
$5\div(3)$	6	$x=\frac{75}{3}=25$.

158 Cuestion 44. *Hallar un número, el qual partido en tres ó quatro partes iguales, el producto de las partes unas por otras sea uno mismo en ambos casos.*

Sea	1	x el número
	2	$\frac{x}{3}\times\frac{x}{3}\times\frac{x}{3}=\frac{x^3}{27}=$ producto de las tres partes
	3	$\frac{x}{4}\times\frac{x}{4}\times\frac{x}{4}\times\frac{x}{4}=\frac{x^3}{256}=$ producto de las quatro
	4	$\frac{x^3}{27}=\frac{x^4}{256}$ (cuestion)
$4\times(27)$	5	$\frac{27x^4}{256}=x^3$
$5\times(256)$	6	$27x^4=256x^3$
$6\div x^3$	7	$27x=256$
$7\div(27)$	8	$x=\frac{256}{27}=9\frac{13}{27}$.

159 Cuestion 45. *Dos negociantes* A *y* B *han hecho compañía, poniendo entre los dos* 500 *doblones de caudal, con el qual han ganado* 160 *doblones; de esta ga-*

ganancia le han tocado á A 32 *doblones mas que á* B, *¿quanto es la puesta de cada uno?*

Llamo	1	x la puesta de *A*, y diré Todo el caudal 500 : 160 de ganancias :: x, puesta de *A* : $\frac{160x}{500}$, ganancia de *A*
	2	$160 - \frac{160x}{500} =$ ganancia de *B*
	3	$\frac{16x}{50} = 160 - \frac{16x}{50} + 32$ (cuestion)
3 trasl.	4	$\frac{32x}{50} = 192$, ó $\frac{x}{50} = 6$
4×(50)	5	$x = 6 \times 50 = 300$.

160 Cuestion 46. *Entre dos compañeros* A *y* B *se reparte una suma de dinero, de modo que la parte de* A *es á la de* B *como* 5 *á* 3, *y rebaxando de ella* $\frac{5}{9}$ *de toda la suma vale* 50 *pesos, ¿quanto ha tocado á cada compañero?*

Sea	1	$5x$ la parte de *A*; será $3x$ la de *B*
	2	$8x =$ la suma repartida
	3	$\frac{40x}{9} = \frac{5}{9}$ de la tal suma
	4	$5x - \frac{40x}{9} = 50$ (cuestion)
4×(9)	5	$\frac{45x - 40x}{9} = \frac{5x}{9} = 50$
5÷(5)	6	$\frac{x}{9} = 10$
6×(9)	7	$x = 90$.

Al uno han tocado 450 pesos, y al otro 270.

161 Cuestion 47. *Dos jugadores* A *y* B *se ponen á jugar con igual cantidad de dinero cada uno; al principio del juego* A *gana* 20 *doblones, y pierde despues la mi-*

mitad de todo el dinero que con esto junta; entonces le queda la mitad no mas del dinero de B, *¿con que dinero se pusieron á jugar?*

Sea	1	x el dinero
	2	$2x =$ suma del dinero de amb.
	3	$x + 20 =$ dinero de A
	4	$\frac{x}{2} + 10 =$ su mitad, dinero de A al último
2—4	5	$2x - \frac{x}{2} - 10 =$ dinero de B al último
	6	$2x - \frac{x}{2} - 10 = x + 20$
6×(2)	7	$4x - x - 20 = 2x + 40$
7 trasl. y red.	8	$x = 60.$

162 Cuestion 48. *Un capital puesto á ganancias, á interes simple, ha montado en* 8 *meses* 297 *reales* 6 *maravedis, y en* 15 *meses monta* 306 *reales, ¿quanto era el capital, y de quanto por* 100 *el interes?*

Sea	1	x el capital
	2	$297, 6 - x =$ el interes en los ocho meses
	3	$306 - x =$ interes en los 15 meses
	4	$8 : 15 :: 297, 6 - x : 306 - x$ (proporc.)
4×	5	$2448 - 8x = 4464 - 15x$
5 trasl.	6	$7x = 2016$
6÷(7)	7	$x = \frac{2016}{7} = 288$, capital.

Para hallar de quanto por 100 era el interes, considero que pues la suma del capital, y del interes de 15 meses monta 306 reales, rebaxando de 306 el capital 288, resta 18, ganancia del capital en el mismo tiem-

tiempo. Digo, pues, ahora $288 \times 15 : 18$ reales :: $100 \times 12 : 5 =$ interes de 100 reales en 12 meses, ó al año; luego el interes era 5 por 100.

163 Cuestion 49. *Un barquero sabe por experiencia que quando navega á remo, ayudado de la marea comun, desde Lóndres á Grenvich, cuya distancia es de 5 millas, tarda $\frac{3}{4}$ de hora; y que quando vuelve á Lóndres, navegando contra la misma marea, aunque costee la orilla del rio, donde la marea es la mitad menos rápida, gasta hora y media; ¿quanto por hora corre la marea en medio del rio donde es mas rápida?*

Llamo	1	x el camino que anda por hora la corriente
	2	$3^{qtos} : 4^{qtos} :: 5^{mill} : 6\frac{2}{3}^{mill} = a$, distancia andada por hora con la marea
	3	$6^{qtos} : 4^{qtos} :: 5^{mill} : 3\frac{1}{3}^{mill} = b$, camino andado por hora contra la marea
	4	$a-x =$ efecto verdadero del remar por hora, yendo desde Lóndres, rebaxado el efecto de la corriente
	5	$b+\frac{x}{2} =$ el mismo efecto á la vuelta
	6	$a-x = b+\frac{x}{2}$, por ser iguales ambos efectos de la marea
$6 \times (2)$	7	$2a-2x = 2b+x$
7 trasl. y red.	8	$x = \frac{2a-2b}{3} = 2^{m}\frac{1}{9}$.

164 Cuestion 50. *Dos oficiales* A *y* B *han trabajado* 50 *dias juntos, ganando* 20 *reales de jornal cada uno; A gasta en este tiempo solo* 6 *reales al dia menos que* B, *y ha aborrado doblado dinero que este, pagando*

do el gasto de dos dias mas, ¿quanto ha gastado al dia cada uno de los dos oficiales?

Sea	1	x reales el gasto diario de A
	2	$20-x =$ lo que A ahorra al dia
	3	$14-x =$ lo que ahorra B
	4	$1000-50x =$ el ahorro total de A
	5	$700-50x =$ el ahorro total de B
	6	$1000-50x = 2\times(700-50x)-2x$ (cuestion)
6 ×	7	$1000-50x = 1400-100x-2x$
7 trasl. y red.	8	$52x = 400$
8÷(52)	9	$x = \frac{400}{52} = 7\frac{9}{13}$, gasto de A.

165 Cuestion 51. *Dos mayorazgos* A *y* B *tienen una misma renta anual;* A *ahorra cada año* $\frac{1}{5}$ *de la suya, pero* B *gasta al año* 60 *pesos mas que* A, *quedando debiendo* 100 *pesos al cabo de tres años, ¿quanto es lo que cada uno cobra y gasta?*

Sea	1	x doblones la renta de cada mayorazgo
	2	$\frac{4x}{5} =$ gasto anual de A (cuest.)
	3	$\frac{4x}{5}+60 =$ gasto anual de B (cuest.)
	4	$\frac{4x}{5}+60-x =$ lo que B queda debiendo (cuest.)
	5	$\left(\frac{4x}{5}+60-x\right)\times 3 = \frac{12x}{5}+180-3x = 100$ (cuest.)
5 red.	6	$180-\frac{3x}{5} = 100$
6 × (5)	7	$900-3x = 500$
7 trasl. y red.	8	$x = \frac{400}{3} = 133^{\text{dobl}}\ 1^{\text{pe}}\ 1^{\text{rl}}\ 23^{\text{ms}}$.

Cues-

166 Cuestion 52. *Un carnicero ha comprado una manada de carneros de diferentes suertes, que entre todos le cuestan 1570 reales. Por cada uno de primera suerte, que son $\frac{1}{3}$ de la manada, ha dado 35 reales; por cada uno de segunda suerte, que son $\frac{1}{4}$ de la manada, ha dado 28 reales; y por cada uno de los restantes ha pagado 18 reales, ¿quantas cabezas ha comprado?*

Sea	1	x las cabezas
	2	$\frac{x}{3}$ = los de primera suerte (cuestion)
	3	$\frac{x}{4}$ = los de segunda (cuestion)
	4	$x-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=\frac{12x-4x-3x}{12}=\frac{5x}{12}$ = los demas (cuestion)
	5	$\frac{x}{3}\times 35+\frac{x}{4}\times 28+\frac{5x}{12}\times 18=1570^{rs}$ (cuestion)
$5\times$	6	$\frac{35x}{3}+\frac{28x}{4}+\frac{5\times 18x}{12}=1570$
$6\times(12)$	7	$\frac{12.35x}{3}+\frac{12.28x}{4}+5.18x=18840$
7 reduc.	8	$4.35x+3.28x+5.18x=18840$
$8\times$	9	$140x+84x+90x=18840$
9 red.	10	$314x=18840$
$10\div(314)$	11	$x=\frac{18840}{314}=60.$

167 Cuestion 53. *Un fabricante de paños vende una pieza que á él le tiene de costa 38 reales la vara; dá $\frac{1}{3}$ de la pieza á 48 reales; $\frac{1}{4}$ á 44; $\frac{1}{5}$ á 42 reales la vara, y lo demas á 40 reales; gana en todo 182 reales, ¿quantas varas tiene la pieza?*

Sea	1	x las varas
	2	$x-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}-\frac{x}{5}=\frac{60x-20x-15x-12x}{60}=\frac{13x}{60}$ = la resta

	3	$\frac{x}{3}\times 48+\frac{x}{4}\times 44+\frac{x}{5}\times 42+\frac{13x}{60}\times 40-38x=182$
	4	$16x+11x+\frac{42}{5}x+\frac{26}{3}x-38x=182$
4 red.	5	$\frac{42x}{5}+\frac{26}{3}x-11x=182$
5×(5·3)	6	$126x+130x-165x=2730$
6 red.	7	$91x=2730$
7÷(91)	8	$x=\frac{2730}{91}=30$

168 Cuestion 54. *Un vinatero quiere mezclar vino de á 8 reales la arroba con vino de á 3 reales, en tal proporcion, que saque un 30 de ganancia por 100 vendiendo la mezcla á 9 reales la arroba, ¿en que proporcion ha de hacer la mezcla?*

Sea	1	a las arrobas del vino mas caro
	2	x arrobas del vino mas barato
	3	$8a$ reales = coste del primero
	4	$3x$ reales = coste del segundo
	5	$8a+3x$ = coste del total
	6	$9a+9x$ = valor de todo á 9 reales la arroba
6—5	7	$9a+9x-8a-3x=a+6x$ = la ganancia
	8	$8a+3x : a+6x :: 100 : 30$ (cuest.)
8 ×	9	$100a+600x=240a+90x$
9 trasl. y red.	10	$510x=140a$
10÷(510)	11	$x=\frac{140}{510}a=\frac{14}{51}a.$

Luego con 14 arrobas de vino mas caro ha de mezclar 51 del mas barato.

169 Cuestion 55. *Un labrador vende una partida de granos de 30 fanegas de trigo, y 40 de cebada, y le dan por todo 270 reales; despues vende otra partida de 50 fanegas de trigo, y 30 de cebada, y le dan por*

por todo 340 reales, ¿á quanto ha vendido la fanega de cada grano?

Sean	1	x é y el precio respectivo de la fanega de cada grano	
	2	$30x+40y=270$	(cuestion)
	3	$50x+30y=340$	
$3\times(4)$	4	$200x+120y=1360$	
$2\times(3)$	5	$90x+120y=810$	
$4-5$	6	$110x=550$, ó $11x=55$	
$6\div(11)$	7	$x=\frac{55}{11}=5$	
2 trasl. y red.	8	$y=\frac{27-3x}{4}=3.$	

170 Cuestion 56. *Un labrador quiere mezclar con 28 fanegas de cebada, á 28 reales la fanega, centeno de á 36 reales, y trigo de á 48 reales la fanega, de modo que en todo componen 100 fanegas de grano, y quiere venderlo á 40 reales la fanega, ¿quantas fanégas de trigo, y quantas de cebada ha de mezclar con el centeno?*

Sean	1	x é y respectivamente las fanegas de centeno y trigo	
	2	$784+36x+48y=4000$	(cuestion)
	3	$28+x+y=100$	
$3\times(36)$	4	$1008+36x+36y=3600$	
$2-4$	5	$-224+12y=400$	
5 trasl.	6	$12y=624$	
$6\div(12)$	7	$y=\frac{624}{12}=52$	
3 trasl.	8	$x=100-28-y=20$	

Cuestiones indeterminadas de primer grado.

171 Las cuestiones indeterminadas son por lo dicho antes las que por tener menos equaciones que incógnitas paran en una equacion final con mas de una

una incógnita, v. gr. esta $ax \pm by = c$, en la qual a, b y c son números enteros y positivos, y cuya resolucion ha de dar tambien en números enteros y positivos los valores de x é y.

Claro está que si damos á qualquiera de las dos incógnitas x é y el valor que se nos antoje, sacarémos el valor de la otra incógnita, y como en lugar de y podemos substituir una infinidad de números diferentes, tambien sacarémos infinitos valores de x.

Este es el motivo, lo repito, de llamarse indeterminadas ó ilimitadas las cuestiones que tienen este paradero. Pero el número de las resoluciones suele limitarse añadiendo la condicion de que los valores de las incógnitas sean números enteros y positivos, ó, por lo menos, racionales. Mediante esta restriccion es á veces sumamente corto el número de resoluciones que estas cuestiones admiten; otras veces hay muchísimas, bien que no las alcanza desde luego el entendimiento; otras veces no admiten ninguna. De aquí es que para resolver estas cuestiones es preciso apelar á artificios particulares, lo que sirve muchisimo para que los principiantes adquieran destreza en calcular. Como en la equacion $ax \pm by = c$, b puede ser positivo ó negativo, lo que supone alguna diferencia entre las cuestiones, segun sea el caso al qual corresponden, resolverémos primero, como mas fáciles, algunas de las que corresponden á la equacion final donde b es positivo.

172 Cuestion 1. *Hallar dos números cuya suma sea* 10.

Sean los dos números x é y; será $x+y=10$, y $x=10-y$.

Aquí no conocemos de y mas circunstancia sino que ha de ser un número entero y positivo. Podrian, pues, substituirse en su lugar todos los números enteros desde 1 hasta el infinito; pero como x ha de

ser

ser tambien un número positivo, claro está que y no puede pasar de 10, pues en pasando y de 10, x será negativo; y si desechamos el valor $x=0$, tampoco puede y pasar de 9. Luego la cuestion no da mas que los valores siguientes.

$$\text{Si } y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$
$$x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$$

Y como los quatro últimos valores son los mismos que los quatro primeros, la cuestion no admite en realidad mas que cinco resoluciones.

173 Cuestion 2. *Partir 25 en dos partes, que la una sea partible por 2, y la otra por 3.*

Sea la una de las dos partes $2x$, y la otra $3y$. Será $2x+3y=25$, y $2x=25-3y$; partiendo por 2, saldrá $x=\frac{25-3y}{2}$. Saco de aquí desde luego que x no puede ser un número positivo, á no ser que $3y$ sea menor que 25, y por lo mismo y menor que 8. Parto $25-3y$ por 2 para sacar todos los enteros que pueda, y sale $x=12-y+\frac{1-y}{2}$, de donde se sigue que $1-y$ ó $y-1$ ha de ser partible por 2. Hago, pues, $y-1=2z$, y sale $y=2z+1$, por manera que $x=12-2z-1-z=11-3z$. Pero como y no puede ser mayor que 8, tampoco puedo tomar en lugar de z número alguno que haga $2z+1$ mayor que 8. Luego z ha de ser menor que 4, ó no puede ser mayor que 3, de donde dimanan las siguientes resoluciones.

Si hago $z=0$	$z=1$	$z=2$	$z=3$
es $y=1$	$y=3$	$y=5$	$y=7$
$x=11$	$x=8$	$x=5$	$x=2$

Luego las dos partes que buscamos de 25 son

1.° $22+3$; 2.° $16+9$; 3.° $10+15$; 4.° $4+21$.

174 Cuestion 3. *Partir* 100 *en dos partes, que la una sea partible por* 7, *y la otra por* 11.

Sea la una parte $7x$ y la otra $11y$; será, pues, $7x + 11y = 100$, y por consiguiente $x = \frac{100-11y}{7} = \frac{98+2-7y-4y}{7}$ ó $x = 14 - y + \frac{2-4y}{7}$; luego $2 - 4y$ ó $4y-2$ ha de ser partible por 7. Pero si $4y-2$ es partible por 7, lo será tambien su mitad $2y-1$; hago, pues, $2y - 1 = 7z$, ó $2y = 7z + 1$, y será $x = 14 - y - 2z$. Pero como $2y = 7z + 1 = 6z + z + 1$, será $y = 3z + \frac{z+1}{2}$, y será preciso hacer $z+1 = 2u$, ó $z = 2u - 1$; este supuesto dá $y = 3z + u$, y podremos tomar por u qualquier número entero que no haga negativo x ó y. Pero como y llega á ser $7u-3$ y $x = 19-11u$, la primera de estas dos equaciones está diciendo que $7u$ ha de ser mayor que 3, y por la segunda $11u$ ha de ser menor que 19, ó u menor que $\frac{19}{11}$; de donde se infiere que u no puede ni siquiera ser $= 2$; y como no es posible que este número sea $= 0$, es preciso que $u = 1$; único valor que se le puede dar. Síguese de aquí que $x = 8$, é $y = 4$, y que las dos partes de 100 que buscamos son 56 y 44.

175 Cuestion 4. *Partir* 100 *en dos partes, que partiendo la una por* 5 *quede el residuo* 2; *y partiendo la otra por* 7, *quede el residuo* 4.

Ya que partiendo la primer parte por 5, queda el residuo 2, la haremos $= 5x+2$; y porque partiendo la otra por 7 queda el residuo 4, la haremos $= 7y + 4$. Luego $5x+7y+6 = 100$, ó $5x = 94-7y = 90+4-5y-2y$; de donde sale $x = 18 - y - \frac{2y-4}{5}$. Síguese de aquí que $4-2y$, ó $2y-4$ ó la mitad $y-2$ ha de ser partible por 5. Con este motivo haremos

y

$y-2=5z$, ó $y=5z+2$, lo que nos dará $x=16-7z$, y manifiesta que $7z$ ha de ser menor que 16, y z menor que $\frac{16}{7}$, quiero decir, que z no puede pasar de 2. Luego la cuestion propuesta admite tres soluciones. 1.° $z=0$ dá $x=16$ y $y=2$, de donde se sigue que las dos partes de 100 son $82+18$;

2.° $z=1$ dá $x=9$ é $y=7$, y para las dos partes de 100 dá $47+53$;

3.° $z=2$ dá $x=2$ é $y=12$, y para las dos partes $12+88$.

176 Cuestion 5. *Dos hueveras tienen entre las dos 100 huevos; la una dice á la otra: si cuento mis huevos de ocho en ocho, me sobran 7; la otra le responde: si yo cuento los mios de diez en diez me sobran tambien 7, ¿quantos huevos tenia cada huevera?*

Ya que el número de los huevos de la primer huevera partido por 8 dexa el residuo 7; y que el número de los huevos de la segunda partido por 10 dexa el mismo residuo 7, el primer número será $8x+7$, y el segundo $10y+7$, con lo que $8x+10y+14=100$, ó $8x=86-10y$, ó $4x=43-5y=40+3-4y-y$. Por consiguiente si hacemos $y-3=4z$, de modo que $y=4z+3$, sacaremos $x=10-4z-3-z=7-5z$; de donde se evidencia que $5z$ ha de ser menor que 7, y z menor que 2, esto es, que no hay mas que las dos soluciones siguientes.

1.° $z=0$ dá $x=7$, y $y=3$; luego la primer huevera tenia 63 huevos, y la otra 37. 2.° $z=1$ dá $x=2$ é $y=7$; luego la primer hueverá tenia 23 huevos, y la otra 77.

177 Cuestion 6. *Se ha hecho una merienda en la fonda, donde entre hombres y mugeres han gastado 1000 reales; cada hombre ha pagado por su escote 19 reales, y cada muger 13 reales por el suyo, ¿quantos eran los hombres, y quantas las mugeres?*

Sea el número de los hombres $=x$, y el de las mu-

mugeres $=y$, será $19x+13y=1000$. Luego $13y=1000-19x=988+12-13x-6x$, é $y=76-x+\frac{12-6x}{13}$; de donde se sigue que $12-6x$ ó $6x-12$, ó tambien $x-2$, sexta parte de este número, ha de ser partible por 13. Hago, pues, $x-2=13z$, y saco $x=13z+2$, é $y=76-13z-2-6z$, ó $y=74-19z$; lo que manifiesta que z ha de ser menor que $\frac{74}{19}$, y por consiguiente menor que 4; por manera que se verifican las quatro soluciones siguientes.

1.° $z=0$ dá $x=2$ é $y=74$. En este caso habia dos hombres y setenta y quatro mugeres; aquellos han pagado 38 reales, y estas 962.

2.° $z=1$ dá $x=15$, número de los hombres, é $y=55$, número de las mugeres; aquellos han gastado 285 reales, y estas 715.

3.° $z=2$ dá para el número de los hombres $x=28$, y para el de las mugeres $y=36$; luego aquellos han gastado 532 reales, y estas 468.

4.° $z=3$ dá $x=41$, é $y=17$; por consiguiente los hombres han gastado 779 reales, y las mugeres 221.

178 Cuestion 7. *Un labrador compra á un tiempo mulas y bueyes en lo que gasta 1770 pesos; cada mula le cuesta 31 peso, y cada buey 21, ¿quantas mulas, y quantos bueyes ha comprado?*

Sea x el número de las mulas, é y el de los bueyes: luego $31x+21y=1770$, ó $21y=1770-31x=1764+6-21x-10x$, esto es, $y=84-x+\frac{6-10x}{21}$. Luego $6-10x$, ó su mitad $3-5x$ ó $5x-3$ ha de ser partible por 21. Hagamos, pues, $5x-3=21z$, saldrá $5x=21z+3$, é $y=84-x-2z$. Pero como $x=\frac{21z+3}{5}=4z+\frac{z+3}{5}$, será necesario hacer $z+3=5u$; cuyo supuesto dá $z=5u-3$, $x=21u-12$, é $y=84-21u+12-10u+6=102-31u$. Si-

Síguese de aquí que u ha de ser mayor que 0, pero menor que 4, de donde se sacan las tres soluciones siguientes.

1.° $u = 1$ dá para el número de las mulas $x = 9$, y para el de los bueyes $y = 71$; luego las mulas han costado 279 pesos, y los bueyes 1491, cuyas dos partidas componen 1770 pesos.

2.° $u = 2$ dá $x = 30$, e $y = 40$; luego las mulas han costado 930 pesos, y los bueyes 840, cuyas dos partidas componen juntas 1770 pesos.

3.° $u = 3$ dá $x = 51$, é $y = 9$; han costado, pues, las mulas 1581 pesos, y los bueyes 189, cuyas dos partidas componen juntas 1770 pesos.

179 Todas las cuestiones hasta aquí resueltas encaminan á equaciones de esta forma $ax + by = c$, en la qual a, b y c representan números enteros y positivos, y de las quales tambien se han de sacar números enteros y positivos para los valores de x é y. Pero quando b es negativo, y tiene la equacion esta forma $ax = by + c$, las cuestiones son de muy distinta naturaleza, y admiten una infinidad de soluciones. Vamos á resolver algunas; la expresion general del valor de x es en este caso $x = \frac{by + c}{a}$.

Aquí pueden ocurrir tres casos; 1.° quando la equacion tiene todos sus términos, y las incógnitas no tienen mas coeficiente que la unidad v. gr. $x - y = c$, de modo que $a = 1$ y $b = 1$. A una equacion de esta forma encamina la siguiente cuestion, y todas las que se le parecen.

180 Cuestion 8. *Hallar dos números cuya diferencia sea 6.*

Llamo x el número menor, é y el mayor; será, pues, $y - x = 6$, y $y = 6 + x$. Podemos substituir en lugar de x todos los números enteros posibles, é y siempre será 6 unidades mayor que x. Si hago

v. g. $x = 100$, será $y = 106$; luego cabe una infinidad de soluciones.

181 2.° El segundo caso es quando la equacion no tiene mas términos que los dos que llevan incógnita, siendo $c = 0$, v. gr. $ax - by = 0$, y $ax = by$, y los coeficientes de las incógnitas números enteros mayores que la unidad. A equaciones de esta forma encaminan la siguiente cuestion, y todas las que se le parecen.

Cuestion 9. *Hallar un número que sea partible por 5 y por 7.*

Llamo N el número que busco, y como es condicion precisa que se le pueda partir por 5, será desde luego $N = 5x$, y será tambien $N = 7y$, porque el número ha de ser tambien partible por 7. Luego $5x = 7y$, y $x = \frac{7y}{5}$. Pero como 7 no es partible por 5, es preciso que lo sea y; haré, pues, $y = 5z$, y tendré $x = 7z$; por manera que $N = 35z$; y como puedo tomar por z un número entero qualquiera, se echa de ver que puedo sacar infinitos valores de N, v. gr. los siguientes.

35, 70, 105, 140, 175, 910, &c.

Si ademas de ser partible N por los números expresados, se añadiese la circunstancia de ser tambien partible por 9, tendríamos $N = 35z$, y hallaríamos $N = 9u$; luego sería $35z = 9u$, y $u = \frac{35z}{9}$, donde se ve á las claras que z ha de ser partible por 9. Haríase, pues, $z = 9s$; sería por consiguiente $u = 35s$, y $N = 315s$.

182 3.° El tercer caso es quando c no es 0, la equacion tiene todos sus términos, y las incógnitas coeficientes mayores que la unidad tal es $ax - by = c$. La resolucion de las cuestiones que encaminan á equaciones de esta forma, tienen alguna mas dificultad que

que las de los dos primeros casos, conforme lo dirán los exemplos.

Cuestion 10. *Hallar un número* N *partible por* 5, *pero tal que si se le parte por* 7, *quede el residuo* 3.

Aquí ha de ser $N = 5x$, y tambien $N = 7y+3$, de donde sale $5x = 7y+3$, y por consiguiente $x = \frac{7y+3}{5} = \frac{5y+2y+3}{5} = y + \frac{2y+3}{5}$. Hagamos $2y+3 = 5z$, saldrá $x = y+z$; pero por ser $2y+3 = 5z$, ó $2y = 5z - 3$, es $y = \frac{5z-3}{2}$, ó $y = 2z + \frac{z-3}{2}$. Hagamos, pues, $z-3 = 2u$, será $z = 2u+3$, é $y = 5u+6$, y $x = y+z = 7u+9$. Luego $N = 35u + 45$, en cuyo valor podemos substituir en lugar de u no solamente todos los números enteros positivos, sino tambien números negativos. Porque como basta que N sea positivo, podemos hacer $u = -1$, de lo que sale $N = 10$. Los demas valores se sacan añadiendo de contino 35, de modo que los valores de N son 10, 45, 80, 115, 150, 185, 220, &c.

183 La resolucion de las cuestiones de la naturaleza de la última es mas ó menos dificultosa, segun sea la razon entre los dos números que sirven de partidores, quiero decir que requieren mas trabajo, segun sea la naturaleza de estos partidores. Lo harán patente las dos cuestiones siguientes.

Cuestion 11. *Hallar un número que partido por* 6, *dexe el residuo* 2, *y partido por* 13, *dexe el residuo* 3.

Sea N el número; será $N = 6x+2$, y $N = 13y+3$; luego $6x+2 = 13y+3$, y $6x = 13y+1$, y $x = \frac{13y+1}{6} = 2y + \frac{y+1}{6}$. Hagamos $y+1 = 6z$, lo que dará $y = 6z - 1$, y $x = 2y+z = 13z - 2$; de donde se sigue que $N = 78z - 10$. Dá, pues, la cuestion los valores siguientes 68, 146, 224, 302, 380, &c. que componen una progresion arismética, cuya diferen-

cia es $78 = 6 \times 13$. Basta por consiguiente conocer uno de estos valores para sacar á poca costa todos los demas.

Ha sido muy fácil la resolucion de esta cuestion. No sucederá lo mismo con la siguiente.

184 Cuestion 12. *Hallar un número* N, *el qual dividiéndole por* 39, *dexe el residuo* 16, *y dividiéndole por* 56, *dexe el residuo* 27.

Desde luego ha de ser $N = 39p + 16$, y despues $N = 56q + 27$, luego $39p + 16 = 56q + 27$, ó $39p = 56q + 11$, y $p = \frac{56q+11}{39} = q + \frac{17q+11}{39} = q + r$, poniendo r en lugar de $\frac{17q+11}{39}$. Por consiguiente $39r = 17q + 11$, y $q = \frac{39r-11}{17} = 2r + \frac{5r-11}{17} = 2r + s$; por manera que $s = \frac{5r-11}{17}$, ó $17s = 5r - 11$, de donde se saca $r = \frac{17s+11}{5} = 3s + \frac{2s+11}{5} = 3s + t$; de modo que $t = \frac{2s+11}{5}$, ó $5t = 2s + 11$, de donde se saca $s = \frac{5t-11}{2} = 2t + \frac{t-11}{2} = 2t + u$, haciendo $u = \frac{t-11}{2}$, y $t = 2u + 11$. Como ya no hay fraccion alguna, se puede tomar u á arbitrio, y solo faltará recorrer ácia atras las siguientes determinaciones.

$t = 2u + 11$
$s = 2t + u = 5u + 22$
$r = 3s + t = 17u + 77$
$q = 2r + s = 39u + 176$
$p = q + r = 56u + 253$, y finalmente $N = 39 \cdot 56u + 9883$. El valor mínimo posible de N se sacará haciendo $u = -4$; cuyo supuesto dá $N = 1147$. Si hiciéramos $u = x - 4$, saldria $N = 2184x - 8736 + 9883$, ó $N = 2184x + 1147$. Forman estos números una

una progresion arismética, cuyo primer término es 1147, y la diferencia es 2184; aquí van algunos de sus términos.

1147, 3331, 5515, 7699, 9883, &c.

185 Cuestion 13. *Una quadrilla de hombres y mugeres van á merendar juntos á escote; cada hombre gasta 25 reales, y cada muger 16; al repasar la cuenta se halla que el gasto de todas las mugeres juntas monta* 1 *real mas que el gasto de todos los hombres, ¿quantos eran los hombres, y quantas las mugeres?*

Sea el número de las mugeres $= p$, el de los hombres $= q$, el gasto de las mugeres será $16p$, y el de los hombres $25q$; luego $16p = 25q + 1$, y $p = \frac{25q+1}{16} = q + \frac{9q+1}{16} = q + r$. Como hemos hecho $r = \frac{9q+1}{16}$, será $9q = 16r - 1$, y $q = \frac{16r-1}{9} = r + \frac{7r-1}{9} = r + s$. Por consiguiente una vez que $s = \frac{7r-1}{9}$, ó $9s = 7r - 1$, será $r = \frac{9s+1}{7} = s + \frac{2s+1}{7} = s + t$, quiero decir que $t = \frac{2s+1}{7}$, ó $7t = 2s + 1$; luego $s = \frac{7t-1}{2} = 3t + \frac{t-1}{2} = 3t + u$, haciendo $u = \frac{t-1}{2}$, ó $2u = t - 1$, por manera que $t = 2u + 1$.

Luego recorriendo ácia atrás los valores hallados, tendremos

$t = 2u + 1$,
$s = 3t + u = 7u + 3$,
$r = s + t = 9u + 4$,
$q = r + s = 16u + 7$,
$p = q + r = 25u + 11$.

Por consiguiente el número de las mugeres era $25u + 11$, y el de los hombres $16u + 7$, en cuyas fórmulas se puede substituir en lugar de u los números enteros

que

que se quiera. Los valores mínimos son en virtud de esto los siguientes.

Número de las mugeres = 11, 36, 61, 86, 111 &c.
de los hombres = 7, 23, 39, 55, 71 &c.

Por la primer solucion, la que consta de los números mínimos, las mugeres gastaron 176 reales, y los hombres 175, esto es, 1 real menos.

186 Cuestion 14. *Un chalan compra caballos y bueyes; por cada caballo dá 31 pesos, y 20 pesos por cada buey; al ajustar su cuenta halla que los bueyes le han costado 7 pesos mas que los caballos, ¿quantos bueyes ha comprado, y quantos caballos?*

Sea p el número de los bueyes, y q el de los caballos; ha de ser $20p = 31q + 7$, y $p = \frac{31q+7}{20} = q + \frac{11q+7}{20} = q + r$; con esto tenemos $20r = 11q + 7$, y $q = \frac{20r-7}{11} = r + \frac{9r-7}{11} = r + s$; luego $11s = 9r - 7$, y $r = \frac{11s+7}{9} = s + \frac{2s+7}{9} = s + t$, esto es, $9t = 2s + 7$, y $s = \frac{9t-7}{2} = 4t + \frac{t-7}{2} = 4t + u$; en virtud de esto $2u = t - 7$, y $t = 2u + 7$.

Luego

$s = 4t + u = 9u + 28$

$r = s + t = 11u + 35$

$q = r + s = 20u + 63$ número de los caballos.

$p = q + r = 31u + 98$ número de los bueyes.

Luego los mínimos valores positivos de p y q se sacan con hacer $u = -3$; los valores mayores siguen formando una progresion arismética, conforme aquí manifestamos.

Número de los bueyes

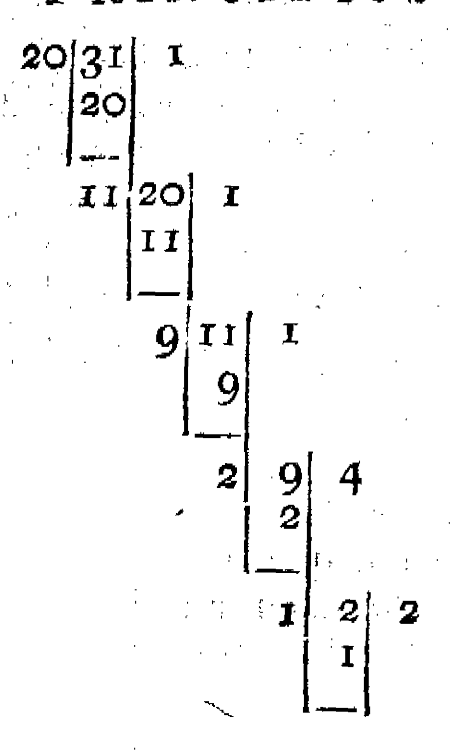
$p = 5, 36, 67, 98, 129, 160, 191, 222, 253$ &c.

Número de los caballos

$q = 3, 23, 43, 63, 83, 103, 123, 143, 163$ &c.

Pa-

187 Paremos un rato la consideracion en el modo con que el valor de las letras p, q se determina por medio del valor de las letras siguientes, y repararemos 1.° que el número 7 se halla con signo positivo en las equaciones de número impar, v. gr. en la primera $p = \frac{31q+7}{20}$, en la tercera $r = \frac{11s+7}{9}$ &c. y con signo negativo en las equaciones de número par, v.gr. en la segunda $q = \frac{20r-7}{11}$, en la quarta $s = \frac{9t-7}{2}$ &c. 2.° que en el segundo miembro de la equacion que expresa el valor de cada letra, se halla un número procedente de la relacion que hay entre 31 y 20, ó uno de los cocientes que salen si se busca el máxîmo comun divisor de estos dos números, sirviendo de coeficiente á la primer letra de dicho miembro, no teniendo la otra letra mas coeficiente que la unidad. Estos coeficientes siguen el órden de las divisiones de las quales salen; quiero decir que en la quinta equacion $t = 2u + 7$, el coeficiente de la primer letra u del segundo miembro es 2, quinto cociente; en la quarta equacion $s = 4t + u$, la primer letra t del segundo miembro lleva el coeficiente 4, quarto cociente, y u la unidad. En las equaciones tercera, segunda y primera, la primera letra del segundo miembro lleva por coeficiente la unidad, porque las divisiones á que dá motivo la investigacion del máxîmo comun divisor de 31 y 20 no dan otros cocientes. Aquí van en la tabla siguiente todos estos cocientes.



Todas estas consideraciones las hará muy patentes la siguiente tabla, en la qual manifestamos primero la resolucion de los números 31 y 20, y despues la determinacion de las letras p, q, r, &c.

$31 = 1 \cdot 20 + 11$	$p = 1 \cdot q + r$
$20 = 1 \cdot 11 + 9$	$q = 1 \cdot r + s$
$11 = 1 \cdot 9 + 2$	$r = 1 \cdot s + t$
$9 = 4 \cdot 2 + 1$	$s = 4 \cdot t + u$
$2 = 2 \cdot 1 + 0$	$t = 2 \cdot u + 7$

188 Del mismo modo figuraremos el exemplo de antes (184)

$56 = 1 \cdot 39 + 17$	$p = 1 \cdot q + r$
$39 = 2 \cdot 17 + 5$	$q = 2 \cdot r + s$
$17 = 3 \cdot 5 + 2$	$r = 3 \cdot s + t$
$5 = 2 \cdot 2 + 1$	$s = 2 \cdot t + u$
$2 = 2 \cdot 1 + 0$	$t = 2 \cdot u + 11$

Su-

189 Suministran estas consideraciones un modo brevísimo de resolver las cuestiones parecidas á las últimas que quedan resueltas.

Sea v. gr. la equacion $bp = aq + n$ en la qual paran, donde a, b, n son números conocidos. Haremos las mismas operaciones que si buscáramos el máxîmo comun divisor de los números a y b, y, hechas que estén, podremos determinar sobre la marcha p y q por medio de las letras siguientes, conforme aquí se vé.

Sea $a = Ab+c$, $b = Bc+d$, $c = Cd+e$, $d = De+f$, $e = Ef+g$, $f = Fg+0$ será $p = Aq+r$, $q = Br+s$, $r = Cs+t$, $s = Dt+u$, $t = Eu+v$, $u = Fv \pm n$.

En la última equacion se le dará á n el signo $+$, siempre que el número de las equaciones sea impar; y se le dará al contrario el signo $-$, quando el número de las equaciones sea par. Manifestemos ahora con algunos exemplos la utilidad de las consideraciones en que nos hemos detenido.

190 Cuestion 15. *Hallar un número el qual dividido por* 11 *dexe el residuo* 3, *y dividido por* 19 *dexe el residuo* 5.

Llamo N el número; será $N = 11p+3$, y $N = 19q+5$. Luego $11p = 19q+2$, de cuya equacion se saca la siguiente tabla.

$19 = 1 . 11+8$ $\quad p = q+r$
$11 = 1 . 8+3$ $\quad q = r+s$
$8 = 2 . 3+2$ $\quad r = 2s+t$
$3 = 1 . 2+1$ $\quad s = t+u$
$2 = 2 . 1+0$ $\quad t = 2u+2$.

Aquí se le puede dar á u el valor que se quiera, y de-

determinar despues retrocediendo las letras antecedentes una despues de otra saldrá.

$$t = 2u+2$$
$$s = t+u = 3u+2$$
$$r = 2s+t = 8u+6$$
$$q = r+s = 11u+8$$
$$p = q+r = 19u+14$$

De aquí sale $N = 209u+157$; luego el número mínimo que pueda expresar el valor de N es 157.

191 Cuestion 19. *Hallar un número* N *tal que si se le parte por* 11, *quede el residuo* 3, *y si se le parte por* 19, *quede el residuo* 5; *y si se le parte por* 29 *quede el residuo* 10.

Por la última condicion $N = 29p+10$; y como el cálculo ya se hizo con los otros dos números, es preciso por lo hallado, que $N = 209u+157$, en cuyo lugar pondremos $N = 209q+157$; luego $29p+10 = 209q+157$, ó $29p = 209q+147$; de donde sale el siguiente tipo.

$$\begin{array}{lll} 209 = 7 \,.\, 29+6 & \text{luego} & p = 7q+r \\ 29 = 4 \,.\, 6+5 & & q = 4r+s \\ 6 = 1 \,.\, 5+1 & & r = s+t \\ 5 = 5 \,.\, 1+0 & & s = 5t-147 \end{array}$$

Y si volvemos atrás, sacaremos

$$s = 5t-147$$
$$r = s+t = 6t-147$$
$$q = 4r+s = 29t-735$$
$$p = 7q+r = 209t-5292.$$

Luego $N = 6061t-153458$. El número mínimo se halla con hacer $t = 26$, cuyo supuesto dá $N = 4128$.

192 Haremos una prevencion muy necesaria en este asunto, y es que la equacion $bp = aq + n$ solo se puede resolver quando los dos números a y b no tienen mas divisor comun que 1; en no concurriendo esta circunstancia, la cuestion será imposible, á no ser

que

que el divisor comun de a y b, lo sea tambien de n.

Si se pidiese v.gr. que $9p=15q+2$, como 3 divisor comun de 9 y 15 no lo es del 2, no se puede resolver la cuestion, porque como $9p-15q$ siempre es partible por 3, nunca puede llegar á ser $=2$. Pero si en el caso actual fuese $n=3$, ó $n=6$ &c. la cuestion sería posible: bastaría dividir primero por 3, de donde saldría $3p=5q+1$, cuya equacion es muy fácil de resolver por la regla de antes. Queda, pues, patente que los números a y b no pueden tener mas comun divisor que la unidad, y que la regla dada sale fallida en todos los demas casos.

193 Lo haremos todavía mas patente con resolver la equacion $9p=15q+2$ por el método comun. Sacamos $p=\frac{15q+2}{9}=q+\frac{6q+2}{9}=q+r$; por manera que $9r=6q+2$, ó $6q=9r-2$; luego $q=\frac{9r-2}{6}=r+\frac{3r-2}{6}=r+s$; de modo que $3r-2=6s$, ó $3r=6s+2$. Por consiguiente $r=\frac{6s+2}{3}=2s+\frac{2}{3}$; de donde se vé claramente que esta expresion jamas podrá ser un número entero, por ser indispensablemente s un número entero. Esta consideracion acaba de confirmar que las cuestiones de esta naturaleza son imposibles.

Método para determinar por medio de dos equaciones tres ó mas incógnitas.

194 En las cuestiones indeterminadas hasta aquí propuestas, el empeño estaba en determinar por una equacion dos cantidades incógnitas, y sacar su valor en números enteros y positivos.

Claro está que quando hay dos equaciones, la cuestion no puede ser indeterminada á no ser que las incógnitas sean mas de dos. Suelen ofrecerse cues-

cuestiones en que se halla esta dificultad, las quales se resuelven por la regla que el gran Euler llama *Regla del ciego*, cuyos fundamentos vamos á manifestar.

195 Cuestion 1. *Treinta personas, entre hombres, mugeres y niños gastan 50 reales en la fonda; el escote de un hombre es de 3 reales, el de una muger de 2 reales, y el de un niño es 1 real; ¿quantos hombres habia, quantas mugeres, y quantos niños?*

Sea el número de los hombres $= p$, el de las mugeres $= q$, y el de los niños $= r$, tendremos por la cuestion las dos equaciones. 1.ª $p+q+r = 30$, 2.ª $3p+2q+r = 50$, de las quales hemos de sacar en números enteros y positivos los valores de p, q, r. La primer equacion dá $r = 30-p-q$, de donde inferimos desde luego que $p+q$ ha de ser menor que 30; substituyendo este valor de r en la segunda equacion, sale $2p+q+30 = 50$, por manera que $q = 20-2p$, y $p+q = 20-p$; lo que es patentemente tambien menos que 30. Pero como, por lo que manifiesta esta equacion, podemos substituir en lugar de p todos los números que no pasan de 10, tendremos las once soluciones siguientes.

Número de los hombres.

$p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

Número de las mugeres.

$q = 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0$

Número de los niños.

$r = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$

196 Cuestion 2. *Un hombre compra* 100 *cabezas de ganado entre cerdos, cabras y carneros, en lo que gasta* 100 *pesos; cada cerdo le cuesta* $3\frac{1}{2}$ *pesos; cada cabra* $1\frac{1}{3}$ *peso, y cada carnero* $\frac{1}{2}$ *peso, ¿quantos cerdos compró, quantas cabras, y quantos carneros?*

Sea el número de los cerdos $= p$, el de las cabras $=$

$=q$; y el de los carneros $=r$; tendremos estas dos equaciones 1.ª $p+q+r=100$, 2.ª $3\frac{1}{2}p+1\frac{1}{3}q+\frac{1}{2}r=100$; multiplico la última por 6 para eliminar los quebrados, y saco $21p+8q+3r=600$. Pero la primera dá $r=100-p-q$; luego con substituir este valor de r en la segunda, saco $18p+5q=300$, ó $5q=300-18p$, y $q=60-\frac{18p}{5}$. Es, pues, preciso que $18p$ sea partible por 5, y sea 5 un factor suyo. Hago $p=5s$, y saco $q=60-18s$, y $r=13s+40$, donde en lugar de s puedo substituir qualquier número entero, menos aquellos de cuya substitucion resulte q negativa. Por esta circunstancia el valor de s no puede pasar de 3, de suerte que si desechamos 0, la cuestion no admite mas que las tres soluciones siguientes.

Quando $s=$	1,	2,	3
sale $p=$	5,	10,	15
$q=$	42,	24,	16
$r=$	53,	66,	79.

Los principiantes que quieran dedicarse á la resolucion de estas cuestiones han de poner sumo cuidado en que sean posibles las que se propongan, para lo qual les servirán de norma las consideraciones siguientes.

Supongamos que la resolucion de una cuestion nos encamine á estas dos equaciones. 1.ª $x+y+z=a$, 2.ª $fx+gy+hz=b$, donde f, g, h, a y b son números dados; si suponemos que de los tres números f, g, h el primero f sea el mayor, y h el menor; ya que por ser $x+y+z=a$, ha de ser $fx+fy+fz=fa$, es patente que $fx+fy+fz$ es mayor que $fx+gy+hz$; luego es preciso que fa sea mayor que b, ó b menor que fa; y como tambien $hx+hy+hz=ha$, y $hx+hy+hz$, es sin duda alguna menor que $fx+gy+hz$, es tambien preciso que ha sea menor que b, ó b ma-

yor que ha. Síguese de aquí que si b no es menor que fa, y al mismo tiempo mayor que ha, la cuestion será imposible.

Esta condicion se expresa con decir que b ha de caber dentro de los límites fa y ha; y conviene tambien que dicha cantidad no se acerque mucho al uno ú otro de estos límites, porque entonces no se podrian determinar las demas letras.

En la cuestion última, donde $a=100$, $f=3\frac{1}{2}$ y $h=\frac{1}{2}$, los límites eran 350 y 50; si en lugar de hacer $b=100$, hiciéramos $b=51$, las equaciones serian $x+y+z=100$, y $3\frac{1}{2}x+1\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z=51$, ó, despues de eliminados los quebrados, $21x+8y+3z=306$; multipliquemos la primera por 3, de modo que $3x+3y+3z=300$; restemos esta equacion de la otra, saldrá $18x+5y=6$; expresion imposible, porque x é y han de ser números enteros y positivos.

197 Cuestion 3. *Un monedero tiene tres suertes de plata, la primera de 7 onzas de fino por marco, la segunda de $5\frac{1}{2}$ onzas, y la tercera de $4\frac{1}{2}$ onzas; tiene que hacer una aligacion de 30 marcos de á 6 onzas de fino en marco, ¿quantos marcos han de entrar de cada suerte?*

Si toma x marcos de la primera, y marcos de la segunda, y z marcos de la tercera, será $x+y+z=30$, primera equacion.

Ya que un marco de la primer suerte tiene 7 onzas de plata fina, los x marcos de esta suerte tendrán $7x$ onzas de fino; los y marcos de la segunda suerte tendrán $5\frac{1}{2}y$ onzas, y los z marcos de la tercer suerte tendrán $4\frac{1}{2}z$ onzas de plata fina; por manera que toda la mezcla tendrá $7x+5\frac{1}{2}y+4\frac{1}{2}z$ onzas de fino. Pero como toda esta mezcla pesa 30 marcos, y cada uno de estos marcos tiene 6 onzas de plata fina, síguese que en toda la mezcla habrá 180 onzas de plata fina; de aquí se deriva la segunda equacion

$7x+5\frac{1}{2}y+4\frac{1}{2}z = 180$, ó $14x+11y+9z = 360$. Si de esta equacion restamos la primera despues de multiplicada por 9, esto es $9x+9y+9z = 270$, sacaremos $5x+2y=90$, de cuya equacion hemos de sacar en números enteros los valores de x é y. Por lo que toca al valor de z, será fácil sacarle despues de la equacion $z=30-x-y$. Pero la equacion de antes dá $2y=90-5x$, é $y=45-\frac{5x}{2}$; hago, pues, $x=2u$, y saco $y=45-5u$ y $z=3u-15$; señal que u ha de ser mayor que 4, pero menor que 10: por consiguiente la cuestion admite las soluciones siguientes.

$u=5$	6	7	8	9
$x=10$	12	14	16	18
$y=20$	15	10	5	0
$z=0$	3	6	9	12

Por el mismo método se resuelven las cuestiones donde hay mas de tres incógnitas.

198 Cuestion 4. *Un labrador compra* 100 *cabezas de ganado en que gasta* 100 *pesos; es á saber, bueyes á* 10 *pesos por cabeza, vacas á* 5 *pesos, becerros á* 2 *pesos, y carneros á* $\frac{1}{2}$ *peso por cabeza, ¿quantos bueyes ha comprado, quantas vacas, quantos becerros, y quantos carneros?*

Sea el número de los bueyes $=p$, el de las vacas $=q$, el de los becerros $=r$, y el de los carneros $=s$; la primera equacion será $p+q+r+s=100$, y la segunda $10p+5q+2r+\frac{1}{2}s=100$, ó, con eliminar los quebrados, $20p+10q+4r+s=200$; si restamos de esta equacion la primera, quedará $19p+9q+3r$ $=$

$= 100$; de donde se saca $3r = 100 - 19p - 9q$, y $r = 33 + \frac{1}{3} - 6p - \frac{1}{3}p - 3q$, ó $r = 33 - 6p - 3q + \frac{1-p}{3}$; luego $1-p$ ó $p-1$ ha de ser partible por 3. Haré, pues,

$p - 1 = 3t$, y tendré

$$p = 3t + 1$$
$$q = q$$
$$r = 27 - 19t - 3q$$
$$s = 72 + 2q + 16t.$$

De aquí se sigue que $19t + 3q$ ha de ser menor que 27, y que, con tal que esta condicion se verifique, se les puede dar á q y t el valor que se quiera. Esto supuesto, tenemos que considerar los casos siguientes.

1.° Si $t = 0$	2.° Si $t = 1$
sale $p = 1$	$p = 4$
$q = q$	$q = q$
$r = 27 - 3q$	$r = 8 - 3q$
$s = 72 + 2q$	$s = 88 + 2q$

No se puede suponer $t = 2$, porque de este supuesto saldria negativo el valor de r.

En el primer caso q no puede pasar de 9, y en el segundo no puede pasar de 2; dan, pues, estos dos casos las siguientes soluciones.

El primero dá estas diez.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
s	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

El segundo caso da las tres soluciones siguientes.

	I	II	III
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
s	88	90	92

Son en todo trece soluciones, que se reducen á diez, con desechar las que incluyen un cero.

Por el mismo método se resuelven estas cuestiones, aunque las letras estén multiplicadas por números dados.

199 Cuestion 5. *Hallar tres números enteros tales, que si se multiplica el primero por 3, el segundo por 5, y el tercero por 7, la suma de los productos sea 560; y si se multiplica el primero por 9, el segundo por 25, y el tercero por 49, la suma de los productos sea 2920.*

Sea el primer número $=x$, el segundo $=y$, el tercero $=z$, tendremos estas dos equaciones, 1.ª $3x+5y+7z=560$; 2.ª $9x+25y+49z=2920$. Si restamos de la segunda el triplo de la primera, esto es, $9x+15y+21z=1680$, quedará $10y+28z=1240$; partiendo por 2, sale $5y+14z=620$, que dá $y=$

$124-\frac{14t}{5}$. Luego z ha de ser partible por 5; hago, pues, $z=5u$, de cuyo supuesto sale $y=124-14u$; substituidos estos valores en la primer equacion, dan $3x-35u+620=560$, ó $3x=35u-60$, y $x=\frac{35u}{3}-20$; hago ahora $u=3t$, y saco por último la siguiente solucion $2x=35t-20$, $y=124-42t$; $z=15t$, donde en lugar de t se puede substituir el número entero que se quiera mayor que 0, pero menor que 3; por manera que no hay mas soluciones que las dos siguientes.

I. Si $t=1$, sale $x=15$, $y=82$, $z=15$.
II. Si $t=2$, sale $x=50$, $y=40$, $z=30$.

De las equaciones de segundo grado.

200 Las equaciones de segundo grado tambien pueden ser determinadas é indeterminadas. Trataremos, pues, de unas y otras separadamente.

Equaciones determinadas de segundo grado.

201 Síguese de lo dicho antes de ahora que las equaciones de segundo grado son todas aquellas cuya incógnita asciende á la segunda potencia no mas, bien que tambien puede haber algun término con la primer potencia de la misma incógnita, y otro término todo conocido. Podrá por consiguiente cifrarse toda equacion quadrada, ó de segundo grado en esta expresion general $ax^2+bx=c$; ó $ax^2+bx-c=0$, donde a, b, c son cantidades conocidas, positivas, ó negativas, por manera que la expresion mas general de las equaciones quadradas será $\pm ax^2\pm bx\pm c=0$.

202 Los términos de una equacion quadrada se distinguen unos de otros por la potencia que cada

uno

uno lleva de la incógnita; de modo que el primer término es aquel donde está la segunda potencia de la incógnita, el segundo, el que lleva su primer potencia, y el último aquel donde no está x. Toda equacion de segundo grado que tiene los tres términos expresados, se llama *equacion completa, mixta*, ó *afecta.*

203 Que una equacion de segundo grado no lleva mas que los tres términos expresados, es muy facil de probarlo, porque 1.° no puede haber término alguno donde la incógnita pase del quadrado, pues si llegara á otra potencia mayor, v. gr. á la tercera, entonces la equacion ya no seria del segundo grado, sino del tercero, y cúbica; 2.° si la equacion llevare muchos términos con la primer potencia de la incógnita, y otros compuestos todos de cantidades conocidas, v. gr. esta $x^2 \begin{matrix} \pm ax \\ \pm bx \end{matrix} = c+d-e$, sería facilísimo reducir las cantidades que componen el segundo término á una sola, con tomar la suma ó la diferencia de las dos; y del mismo modo se reducirian tambien á una sola cantidad todas las que componen el término conocido; por manera que si la suma ó la diferencia de a y $b = g$, y la suma ó diferencia de $c+d-e = h$, la equacion se reducirá á $xx+gx = h$. Con una equacion numérica haremos esto mas patente. Sea v. gr. $xx \begin{matrix} +3x \\ -5x \end{matrix} = 4+3-10$ la equacion; es patente que se reducirá á $xx-2x = -3$, ó $xx-2x+3 = 0$.

204 Equaciones hay de segundo grado que carecen de segundo término, esta v. gr. $xx = bc$; á estas se les dá el nombre de *equaciones incompletas* ó *puras.* Desde ahora puede percibirse que la resolucion de las equaciones puras ha de dar menos dificultad que la resolucion de las equaciones mixtas.

205 La resolucion de una equacion pura se logra con sacar la raiz quadrada de cada miembro suyo; si $xx = bc$ v. gr. será $x = \sqrt{bc}$. Aquí pueden ocurrir tres casos; 1.° quando bc es un quadrado cabal, el valor de x sale cabal, pudiendo ser un número entero ó quebrado; 2.° quando bc no es un quadrado cabal, el valor de x es $= \sqrt{bc}$; 3.° quando bc es una cantidad negativa, el valor de x es imposible ó imaginario.

Como la raiz de todo quadrado positivo puede ser positiva, ó negativa, tambien de la equacion $xx = aa$ se saca $x = +a$, é $x = -a$, ó $x = \pm a$, y quando $x^2 = bc$, $x = \pm\sqrt{bc}$. De donde se infiere que toda equacion de segundo grado dá dos valores de la incógnita. Luego toda cuestion que para en una equacion quadrada admite dos resoluciones, bien que en muchos casos, v. gr. quando se trata de hombres, no sirve la resolucion que dá negativo el valor de la incógnita.

206 Por lo que mira á las equaciones afectas de segundo grado, tambien son fáciles de resolver para el que tiene presente lo dicho acerca de la formacion del quadrado de un binomio. Consta que el quadrado de $x+a$, v. gr. es $xx+2ax+aa$, en cuyo quadrado conviene reparar 1.° que consta de tres términos; 2.° que el último término es el quadrado de la mitad del coeficiente que lleva la incógnita en el segundo término, esto es el quadrado de a.

207 Sentado esto, quatro circunstancias han de concurrir en una equacion de segundo grado para que un calculador se empeñe en su resolucion. 1.ª el quadrado de la incógnita ha de ser positivo, y si fuese negativo, se le trasladará del un miembro al otro; 2.ª dicho quadrado no ha de llevar mas coeficiente que la unidad; 3.ª han de estar todos en un miembro los términos que llevan la incógnita; 4.ª ha de ser

ser este miembro un quadrado cabal, añadiéndole lo que le falte para serlo, esto es, el quadrado de la mitad del coeficiente del segundo término, cuya cantidad se añadirá tambien al otro miembro á fin de que subsista la equacion; en verificándose todo esto se sacará la raiz quadrada de cada miembro, y estará resuelta la equacion.

Propóneseme v. gr., para que la resuelva, la equacion $ax - \frac{xx}{2} + dd = cc$, donde el quadrado xx está multiplicado por $\frac{1}{2}$, y es negativo. Quito desde luego el denominador 2, multiplicándolo todo por 2, y saco $2ax - xx + 2dd = 2cc$; 2.° hago positivo el quadrado $-xx$ pasándole al otro miembro, y los demas términos que llevan la incógnita, y saco $xx - 2ax = 2dd - 2cc$; como echo de ver que el primer miembro no es un quadrado; 3.° añado al primer miembro el quadrado de la mitad de $2a$, esto es lo que le falta para que dicho miembro sea el quadrado de $x - a$, cuya cantidad añado tambien al segundo miembro para conservar la equacion. Con esto queda la propuesta transformada en estotra $xx - 2ax + aa = 2dd - 2cc + aa$, y sacando la raiz de cada miembro sale

$$x - a = \sqrt{(2dd - 2cc + aa)}$$

$$\text{y } x = a \pm \sqrt{(2dd - 2cc + aa)}.$$

Si se me ofreciera resolver la equacion $9abxx - 3bbx = ad$; sacaría primero, dividiéndolo todo por $9ab$, $xx - \frac{bx}{3a} = \frac{d}{9b}$; despues añadiría á cada miembro el quadrado de la mitad de $\frac{b}{3a}$, ó el quadrado de $\frac{b}{6a}$ cuyo quadrado es $\frac{bb}{36aa}$, y sacaría $xx - \frac{bx}{3a} + \frac{bb}{36aa} = \frac{bb}{36aa} + \frac{d}{9b}$, y sacando últimamente la raiz quadrada, hallaría $x - \frac{b}{6a} = \pm\sqrt{\left(\frac{bb}{36aa} + \frac{d}{9b}\right)}$.

La

La equacion $x-xx=a$ se convertirá en $xx-x=-a$; para que el primer miembro sea un quadrado cabal le falta el quadrado de $-\frac{1}{2}$ por ser -1 el coeficiente de $-x$; añadiendo, pues, $\frac{1}{4}$ á cada miembro saldrá $xx-x+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-a$, y sacando la raiz, sale $x-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{1-4a}{4}\right)}$, y $x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1-4a}{4}\right)}$.

Finalmente, el primer miembro de la equacion $xx+ax-x=aa$, tampoco es un quadrado cabal, porque las dos cantidades $ax-x$ no son mas que un término, y son lo mismo que $(a-1)x$. Luego he de añadir á cada miembro el quadrado de $\frac{a-1}{2}$, esto es, $\left(\frac{a-1}{2}\right)^2$, y saldrá $xx+ax-x+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+aa$, y sacando la raiz, sale $x+\left(\frac{a-1}{2}\right)=\pm\sqrt{\left[\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+aa\right]}$, ó $x=-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2-2a+1}{4}+aa\right)}=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{(5aa-2a+1)}}{2}$.

208 Consta, pues, de lo dicho hasta aquí 1.° que á toda equacion quadrada se le puede dar esta forma $xx+px=q$, donde p y q representan números enteros ó quebrados, positivos ó negativos; 2.° que con añadir á cada miembro $\frac{1}{4}pp$, quadrado de $\frac{1}{2}p$, mitad del coeficiente del segundo término, sale $xx+px+\frac{1}{4}pp=\frac{1}{4}pp+q$, con lo que el primer miembro es un quadrado cabal, es á saber, el quadrado de $x+\frac{1}{2}p$; de donde 3.° finalmente sale, extrayendo la raiz quadrada de cada miembro, $x+\frac{1}{2}p=\sqrt{(\frac{1}{4}pp+q)}$, y $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}pp+q)}$, porque toda raiz quadrada puede ser afirmativa ó negativa. Con el auxîlio de esta fórmula, ó expresion general, podrá todo calculador que la tenga presente sacar sobre la marcha el valor de la incógnita de qualquiera equacion determinada de segundo grado; no tendrá mas que substituir en lugar de las letras p, q los números que representen.

Sea v. gr. la equacion propuesta $xx-6x=7$; aquí $p=6$ y $q=7$; luego $\frac{1}{2}p=3$; $\frac{1}{4}pp=\frac{36}{4}=9$; por consiguiente $x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}pp+q)}$ dá $x=3\pm\sqrt{(9+7)}=3+4$ ó $3-4$, esto es, $x=7$ ó $x=-1$. Si la propuesta fuese $xx-10x=-9$, será $p=10$, $q=-9$, y executando en la fórmula las substituciones correspondientes, será $x=5\pm\sqrt{(25-9}=5\pm4$, esto es $x=9$ ó 1.

Por lo mismo que las equaciones puras son mas fáciles de resolver que no las mixtas, se conseguirá la resolucion de estas siempre que se quiera, con transformarlas en equaciones puras, para lo qual todo se reduce á quitarles su segundo término. Con esta mira, en lugar de la incógnita se substituye otra, menos la mitad del coeficiente del segundo término, quando este es positivo, ó mas la mitad del mismo coeficiente, quando este es negativo; quiero decir que si la equacion propuesta fuese $xx-px=q$, en lugar de x se substituirá $y+\frac{1}{2}p$; y si fuese $xx+px=q$, en lugar de x se substituirá $y-\frac{1}{2}p$. Una vez sacado de la equacion transformada que esta equacion suministre el valor de y, se conocerá el de x substituyendo en $y\pm\frac{1}{2}p$ el valor numérico de y. Voy á enseñar como se ha de hacer la eliminacion del segundo término de la equacion; substituiremos $y+\frac{1}{2}p$ en lugar de x, con lo que

$$\left.\begin{array}{r} xx \\ -px = x\times -p = \\ +q \end{array}\right\} \begin{array}{r} yy+py+\frac{1}{4}pp \\ -py-\frac{1}{2}pp \\ +q \\ \hline yy \quad 0 - \frac{1}{4}pp+q = 0 \\ \text{ó} \quad yy \quad = \frac{1}{4}pp-q \end{array}$$

porque $+py-py$ se destruyen, y $\frac{1}{4}pp-\frac{1}{2}pp=-\frac{1}{4}pp$.

Hemos parado, pues, en la equacion pura de segundo

do grado $yy = \frac{1}{4}pp - q$ que dá $y = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$. Una vez averiguado el valor de y, lo éstará tambien el de x, substituyendo aquel en la equacion $x = y + \frac{1}{2}p$.

Cuestiones de segundo grado.

209 Cuestion 1. *Partir* 12 *en dos partes, cuyo producto sea* 40.

Sea	1	x la una parte, la otra será $12 - x$
	2	$(12 - x) \times x = 40$ ó $12x - xx = 40$ (cuest.)
2 trasl.	3	$xx - 12x = -40$
3 comp.	4	$xx - 12x + 36 = 36 - 40 = -4$
$4\sqrt{}$	5	$x - 6 = \sqrt{(-4)}$
5 trasl.	6	$x = 6 \pm \sqrt{(-4)}$.

Esta cuestion es imposible, porque dá para x un valor imaginario.

210 Ahora podemos demostrar 1.° que la suma ó diferencia de cantidades reales y otra imaginaria es imaginaria. Porque si $a - \sqrt{-3}$ v. gr. fuese una cantidad real qual es b, sería $a - \sqrt{-3} = b$, ó $a - b = \sqrt{-3}$; luego la diferencia $a - b$ de dos cantidades reales, que no puede menos de ser real, sería igual á una cantidad imaginaria, cuya consecuencia es un absurdo.

211 2.° Quando uno de los términos de un polynomio es un radical imaginario, se puede eliminar el radical, multiplicando el polynomio por otro que tambien lleve un radical imaginario, pero de signo contrario. Si multiplico $a - \sqrt{-b}$ por $a + \sqrt{-b}$, el producto $a^2 + b$ no tendrá ningun radical imaginario; porque al producto de a por $-\sqrt{-b}$, le destruye el producto de a por $+\sqrt{-b}$. Pero $(a - \sqrt{-b}) \times (a - \sqrt{-b}) = a^2 - 2a\sqrt{-b} - b$, en que hay un radical imaginario.

212 Luego el quadrado de un binomio que tenga un

un radical imaginario, será tambien imaginario. Porque la suma ó diferencia de cantidades imaginarias, y la suma, ó diferencia de cantidades imaginarias y reales, es imaginaria. Pero si ambos términos del binomio fuesen imaginarios, el quadrado no tendrá ninguna imaginaria; porque la cantidad radical que llevare será por precision positiva y real. El quadrado de $(\sqrt{-a}-\sqrt{-b})^2$ v. gr. $= -a-2\sqrt{ab}-b$; en cuya expresion es positiva, y por lo mismo real la cantidad que está debaxo del radical. Se comprobará haciendo el cálculo.

213 Cuestion 2. *Hallar un número cuya raiz quadrada tenga con su raiz cúbica la razon de 5 á 2.*

Sea	1	x^6 el número, x^3 su raiz quadrada, y x^2 su raiz cúbica
	2	$x^3 : x^2 :: 5 : 2$ (cuestion)
2 multipl.	3	$2x^3 = 5x^2$
$3 \div x^2$	4	$2x = 5$
$4 \div (2)$	5	$x = \frac{5}{2} = 2{,}5$
		$x^6 = 244{,}140625$, número pedido.

214 Cuestion 3. *Hallar dos números en razon de 3 á 5 tales, que la quinta potencia del primero tenga con la tercer potencia del segundo la razon de 972 á 125.*

Sean	1	$3x$ y $5x$ los dos números.
	2	$(3x)^5 : (5x)^3 :: 972 : 125$, ó $243x^5 : 125x^3 :: 972 : 125$ (cuest.)
2 ×	3	$243x^5 \times 125 = 125x^3 \times 972$
$3 \div 125x^3$	4	$x^2 = \frac{972}{243} = 4$
	5	$x = 2$

son por lo mismo 6 y 10 los dos números pedidos.

215 Cuestion 4. *Hallar tres números que tengan*

la

la razon de $\frac{1}{2}$ *á* $\frac{1}{3}$ *y* $\frac{1}{4}$, *y la suma de sus quadrados sea* 549.

Sea	1	x el primero de los tres números
será	2	$\frac{2x}{3}$ el segundo, pues, $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} :: x : \frac{2x}{3}$ (cuestion)
y	3	$\frac{x}{2}$ el tercero, pues, $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} :: x : \frac{x}{2}$ (cuestion)
	4	$x^2 + \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 549$, ó
4	5	$x^2 + \frac{4x^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 549$ (cuest.)
5×(4×9)	6	$36x^2 + 16x^2 + 9x^2 = 36 \times 549$
6 red.	7	$61x^2 = 36 \times 549$
7÷(61)	8	$x^2 = \frac{36 \times 549}{61} = 36 \times 9$
8√	9	$x = 6 \times 3 = 18.$

Luego los tres números son 18, 12 y 9. Con mucha mayor elegancia se puede resolver esta cuestion, reduciendo á un mismo denominador los tres quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, y $\frac{1}{4}$, los quales serán entonces como 6,4,3. Por consiguiente el primer número propuesto será $6x$, y los otros dos $4x$ y $3x$; luego será $36x^2 + 16x^2 + 9x^2 = 549$; lo demas como antes.

216 Cuestion 5. *Hallar dos números cuya diferencia* $= 6$, *y su producto* $= 720$.

Sea	1	x el menor de los números, será $x + 6$ el mayor
	2	$xx + 6x = 720$ (cuestion)
2 compl.	3	$xx + 6x + 9 = 720 + 9 = 729$
3 resol.	4	$x + 3 = \sqrt{729} = 27$
4 trasl.	5	$x = 27 - 3 = 24.$

Cues-

217 Cuestion 6. *Hallar dos números cuya suma $=60$, y la suma de sus quadrados $=1872$.*

Sea	1	x el número mayor, será $60-x$ el menor
	2	$x^2+(60-x)^2=x^2+3600-120x+x^2=1872$ (cuestion)
2 red.	3	$2x^2-120x=-1728$
3÷(2)	4	$x^2-60x=-864$
4 compl.	5	$x^2-60x+900=-864+900=36$
5√	6	$x-30=\sqrt{36}=6$
6 trasl.	7	$x=30+6=36$
	8	$60-x=24.$

Vamos á dar una resolucion mas general de la misma cuestion.

Sea	1	a la suma de los dos números, b la suma de sus quadrados, y x el número mayor
	2	$x^2+a^2-2ax+x^2=b$ (cuest.)
2 red. y trasl.	3	$2x^2-2ax=b-a^2$
3÷(2)	4	$x^2-ax=\frac{b}{2}-\frac{a^2}{2}$
4 compl.	5	$x^2-ax+\frac{a^2}{4}=\left(\frac{b}{2}-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}\right)=\frac{b}{2}-\frac{a^2}{4}$
5√	6	$x-\frac{a}{2}=\sqrt{\left(\frac{b}{2}-\frac{a^2}{4}\right)}$
6 red.	7	$x=\sqrt{\left(\frac{b}{2}-\frac{aa}{4}\right)}+\frac{a}{2}.$

Si se hace $a=60$, y $b=1872$, saldrá lo mismo que antes.

Cues-

218 Cuestion 7. *Partir 60 en dos partes tales, que el producto de una por otra sea* $=864$.

Sea	1	$60=a$, $864=b$, x el número mayor, y $a-x$ el menor
	2	$ax-xx=b$ (cuestion)
2 trasl.	3	$xx-ax=-b$
3 compl.	4	$xx-ax+\frac{1}{4}aa=-b+\frac{aa}{4}$
$4\sqrt{}$	5	$x-\frac{a}{2}=\sqrt{(\frac{aa}{4}-b)}$
5 trasl.	6	$x=\frac{a}{2}+\sqrt{(\frac{aa}{4}-b)}=36$, número mayor
	7	y $a-x=24$, número menor.

219 Cuestion 8. *Partir 60 en dos partes tales, que la suma del quadrado de la mayor multiplicado por la menor, y del quadrado de la menor multiplicado por la mayor sea* 51840.

Sea	1	$a=60$, $b=51840$, la parte mayor x, será $a-x$ la menor
	2	$x^2\times(a-x)+(a-x)^2\times x=b$, ó $ax^2-x^3+a^2x-2ax^2+x^3=b$ (cuestion)
2 red.	3	$-ax^2+a^2x=b$
3 trasl.	4	$ax^2-a^2x=-b$
$4\div a$	5	$x^2-ax=-\frac{b}{a}$
5 compl.	6	$x^2-ax+\frac{aa}{4}=\frac{aa}{4}-\frac{b}{a}$
$6\sqrt{}$	7	$x-\frac{a}{2}=\sqrt{(\frac{a^2}{4}-\frac{b}{a})}$
7 trasl.	8	$x=\frac{a}{2}+\sqrt{(\frac{a^2}{4}-\frac{b}{a})}=36.$

Cues-

220 Cuestion 9. *Hallar dos números cuya suma sea 20, y la suma de sus cubos* $= 2240$.

Sea	1	x el número mayor, $20 = a$, será $x - x$ el menor, $2240 = b$
	2	$x^3 + (a-x)^3 = b$, ó $x^3 + a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3 = b$ (cuestion)
3 red.	3	$3ax^2 - 3a^2x = b - a^3$
$3 \div 3a$	4	$x^2 - ax = \frac{b}{3a} - \frac{a^2}{3}$
4 compl.	5	$x^2 - ax + \frac{aa}{4} = \frac{b}{3a} - \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{b}{3a} - \frac{a^2}{12}$
$5\surd$	6	$x - \frac{a}{2} = \surd\left(\frac{b}{3a} - \frac{aa}{12}\right)$
6 trasl.	7	$x = \frac{a}{2} + \surd\left(\frac{b}{3a} - \frac{aa}{12}\right) = \frac{20}{2} + \surd\left(37\frac{1}{3} - 33\frac{1}{3}\right) = 12.$

221 Cuestion 10. *Partir 240 en dos partes, tales que la mayor partida por la menor, sea á la menor partida por la mayor como 147 á 75, ó como* m *á* n.

Sea	1	$240 = a$, $147 = m$, $75 = n$, la parte mayor $= x$, la menor será $a - x$
	2	$\frac{x}{a-x} : \frac{a-x}{x} :: m : n$ (cuestion)
$2 \times$	3	$\frac{nx}{a-x} = \frac{m(a-x)}{x}$
$3 \times x$	4	$\frac{nxx}{a-x} = m(a-x)$
$4 \times (a-x)$	5	$nx^2 = m(a-x)^2$
$5 \div m$	6	$\frac{n}{m}x^2 = (a-x)^2$
$6\surd$	7	$x\surd\left(\frac{n}{m}\right) = a - x$

		Hago $\sqrt{\frac{n}{m}} = \frac{b}{c}$, y sale
	8	$bx = ca - cx$
8 trasl.	9	$bx + cx = ca$
$9 \div (b+c)$	10	$x = \frac{ca}{b+c}$
		Como (cuestion) $\sqrt{\frac{n}{m}} = \sqrt{\frac{75}{147}} = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}$, sale $b=5$, $c=7$, lo que dá
	11	$x = \frac{7 \times 240}{12} = 7 \times 20 = 140.$

222 Cuestion 11. *He recibido para hacer una obra á jornal dos oficiales* A *y* B, *que no ganan un mismo jornal; acabada la obra,* A, *que no ha holgado ningun dia, cobra* 96 *reales, y* B, *que ha holgado seis dias, cobra* 54 *reales. Pero si* B *no hubiera holgado dia alguno, y* A *hubiera holgado seis, los dos oficiales hubieran cobrado una misma cantidad; ¿quantos dias han trabajado los dos oficiales, y que jornal ganaba cada uno?*

Sea	1	x los dias que A ha trabajado, serán $x-6$ los dias que ha trabajado B
Será	2	$\frac{96}{x}$ lo que A gana al dia, y $\frac{54}{x-6}$ el jornal que gana B.
Será	3	$\frac{54}{x-6} \times x$ lo que B ganara si trabajara todos los dias
	4	$\frac{96}{x} \times (x-6)$ la ganancia de A si hubiese holgado 6 dias
3=4	5	$\frac{54x}{x-6} = \frac{96 \times (x-6)}{x}$ (cuestion)
5 red.	6	$54x^2 = 96 \times (x-6)^2$
6÷(6)	7	$\frac{9x^2}{16} = (x-6)^2$

$7\surd$	8	$\frac{3x}{4} = x - 6$
8 red.	9	$x = 24.$

Sale, pues, que *A* ganaba 4 reales de jornal, y *B* 3 reales.

223 Cuestion 12. *Dos viageros* A *y* B *salen al mismo tiempo al encuentro uno de otro de dos ciudades distantes una de otra* 320 *leguas;* A *anda cada dia* 8 *leguas mas que B; y el número de dias que tardan en encontrarse es igual á la mitad del número de leguas que* B *anda al dia; ¿quantos dias han tardado en encontrarse?*

Sea	1	$320 = a$, $8 = b$, x el número de dias que tardan los dos viageros en encontrarse
	2	$2x$, número de leguas que *B* anda al dia } (cuest.)
	3	$2x + b$, número de leguas que *A* anda al dia } (cuest.)
$2 \times x$	4	$2x \times x$ número de todas las leguas que anda *B*
$3 \times x$	5	$2xx + bx$ todas las leguas que ha andado *A*
$4 + 5$	6	$4xx + bx = a$
$6 \div (4)$	7	$xx + \frac{bx}{4} = \frac{a}{4}$
7 compl.	8	$xx + \frac{bx}{4} + \frac{bb}{64} = \frac{a}{4} + \frac{bb}{64}$
$8\surd$	9	$x = \surd\left(\frac{a}{4} + \frac{bb}{64}\right) - \frac{b}{8} = 8$
	10	$2xx = 128$, leg. andadas por *B*
	11	$2xx + bx = 192$, leguas andadas por *A*.

224 Cuestion 13. *Se despachan á un tiempo de Madrid dos propios para otra Ciudad que dista* 90 *leguas; el primero que anda por hora una legua mas que el otro, llega una hora antes que él, ¿quantas leguas anda cada propio por hora?*

Sea	1	x las leguas que *A* anda por hora, $x-1$ las que *B* anda por hora, y sea $90=a$
Será	2	$\frac{a}{x}$ el número de horas en que *A* andará todo el camino
Será	3	$\frac{a}{x-1}$, número de horas en que *B* le andará
	4	$\frac{a}{x}=\frac{a}{x-1}-1$ (cuestion)
4 red.	5	$ax-a=ax-x^2+x$
5 red. y trasl.	6	$x^2-x=a$
6 compl.	7	$x^2-x+\frac{1}{4}=a+\frac{1}{4}$
$7\sqrt{}$	8	$x=\frac{1}{2}+\sqrt{\left(a+\frac{1}{4}\right)}=9\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=10.$

225 Cuestion 14. *Hallar dos números tales que en su suma multiplicada por el mayor quepa* 100 *veces el menor, y multiplicada por el menor quepa* 64 *veces el mayor.*

Sea	1	x el número mayor, y el menor
	2	$(x+y)\times x=100y$ } (cuestion)
	3	$(x+y)\times y=64x$ } (cuestion)
$2\times y$	4	$(x+y)\times xy=100y^2$
$3\times x$	5	$(x+y)\times xy=64x^2$

$4=5$	6	$100y^2 = 64x^2$
$6\sqrt{}$	7	$10y = 8x$
$7\div(10)$	8	$y = \frac{8x}{10} = \frac{4}{5}x$
8 subst. en 3	9	$\left(x+\frac{4x}{5}\right)\times\frac{4x}{5} = 64x$
9 red.	10	$\frac{9x}{5}\times\frac{4x}{5} = 64x$
$10\div(4)$	11	$\frac{9x}{5}\times\frac{x}{5} = 16x$
$11\div x$	12	$\frac{9x}{25} = 16$
$12\times(25)$ y $\div(9)$	13	$x = \frac{25\times 16}{9} = \frac{400}{9} = 44\frac{4}{9}$
	14	$y = 35\frac{5}{9}$.

226 Cuestion 15. *Hallar tres números tales, que el producto de unos por otros, dividido por las sumas diferentes de dos de ellos, componga un número dado; ó, lo que es todo uno, sacar el valor de* x, y, z *de las tres equaciones siguientes.*

$$\frac{xy}{x+y} = 200,\ \frac{xz}{x+z} = 150,\ \frac{yz}{y+z} = 120.$$

Multiplicando, sale $xyz = 200x + 200y = 150x + 150z = 120y + 120z$. Reduciendo,

$$\left.\begin{array}{r} 50x+200y = 150z \\ 200x+\ 80y = 120z \end{array}\right\}\text{ ó }\left\{\begin{array}{l} x+4y = 3z \\ 5x+2y = 3z. \end{array}\right.$$

Luego $x+4y = 5x+2y$, y por lo mismo $y = 2x$, cuyo valor substituido en $3z = x+4y$, sale $3z = 9x$, y $z = 3x$.

Substituyendo, pues, en $\frac{xy}{x+y} = 200$ los valores hallados de y y z, sale $\frac{x\times 2x\times 3x}{x+2x} = 200$, esto es $2x^2 = 200$; luego $x = 10$, $y = 20$, $z = 30$.

227 Cuestion 16. *Hallar que razon hay entre dos números, cuyo rectángulo es igual al quadrado de sus diferencias.*

Sea el número menor al mayor como 1 á x; si llamo z el número menor, el mayor será xz, pues $1 : x :: z : xz$, de donde se sacará $xz \times z = (xz-z)^2$, ó $xz^2 = x^2z^2-2xz^2+z^2$, por la cuestion. Partiéndolo todo por z^2, sale $x = x^2-2x+1$, que dá $x^2-3x = -1$, y por consiguiente $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2,618$.

228 Cuestion 17. *Hallar dos números, cuyo producto es 300; con la circunstancia que si se añade 10 al menor, y se resta 8 del mayor, el producto de la suma y de la resta será tambien = 300.*

Llamo x el número mayor, y el menor, $300 = a$, $10 = b$, $8 = c$. Tengo, pues, por la cuestion $xy = a$, $(x-c) \times (y+b) = a$, ó $xy+bx-cy-cb = a$. Restando de esta equacion estotra $xy = a$, queda $bx-cy-cb = 0$. Luego $bx = cb+cy$, $x = \frac{cb+cy}{b}$; cuyo valor substituido en la primer equacion dá $\frac{cby+cy^2}{b} = a$; de donde sale $y^2+by = \frac{ab}{c}$; y, completando el quadrado, $y^2+by+\frac{bb}{4} = \frac{ab}{c}+\frac{bb}{4}$, cuya equacion dá $y = \sqrt{\left(\frac{ab}{c}+\frac{bb}{4}\right)} - \frac{b}{2} = 15$; $x = \frac{a}{y} = 20$.

229 Cuestion 18. *Partir 100 en dos partes tales que su diferencia tenga con su suma la misma razon que su rectángulo con la diferencia de sus quadrados.*

Sea a la mitad del número propuesto, y x la mitad de la diferencia de sus dos partes; con esto la parte mayor será $a+x$, y la menor $a-x$ (115) lo que dará $2x : 2a :: (a+x) \times (a-x) : (a+x)^2-(a-x)^2$, ó $x : a :: aa-xx : 4ax$. De donde se saca $4ax^2 = a \times (aa-xx)$, ó $4x^2 = a^2-x^2$, y por consiguiente $x = \sqrt{\left(\frac{aa}{5}\right)} = 22,36$. Por manera que la parte mayor es 72,36, y la menor 27,64.

230 Cuestion 19. *Partir 60 en dos partes, tales que*

que su producto sea á la suma de sus quadrados en razon de 2 á 5.

Sea $60 = a$, x la parte mayor, la menor será $a-x$, hago $2 = m$, $5 = n$.

El producto de las dos partes será $ax-xx$, la suma de sus quadrados $a^2-2ax+2x^2$. Ya que $m : n :: ax-xx : a^2-2ax+2x^2$, será $2mx^2-2max+ma^2 = nax - nx^2$, de donde sale $2mx^2+nx^2-2max-nax = -ma^2$; esto es, $(2m+n) \times x^2-(2m+n) \times ax = -ma^2$; ó $x^2 - ax = \frac{-maa}{2m+n}$. Luego $x^2 - ax + \frac{aa}{4} = \left(\frac{aa}{4} - \frac{ma^2}{2m+n}\right) = \frac{aa}{4} \times \frac{n-2m}{n+2m}$, y $x = \frac{a}{2}\sqrt{\left(\frac{n-2m}{n+2m}\right)} + \frac{a}{2} = 40$.

231 Cuestion 20. *Hallar dos números cuyo producto es 320, y la diferencia de sus cubos es al cubo de su diferencia, como 61 á la unidad.*

Sea x el número mayor, y el menor, $a = 320$, $61 = n$.

Por la cuestion $x^3-y^3 : (x-y)^3 :: n : 1$, ó conformar el cubo señalado $x^3-y^3 : x^3-3x^2y+3xy^2-y^3 :: n : 1$; ó dividiendo $3x^2y-3xy^2 : x^3-3x^2y+3xy^2-y^3 :: n-1 : 1$; ó, lo que es lo mismo, $3xy \times (x-y) : (x-y)^3 :: n-1 : 1$; y partiendo por $x-y$ sale $3xy : (x-y)^2 :: n-1 : 1$; ó $3a : (x-y)^2 :: n-1 : 1$, por ser $xy = a$; lo que dá $(x-y)^2 = \frac{3a}{n-1}$, y por lo mismo $x-y = \sqrt{\left(\frac{3a}{n-1}\right)}$ que supongo $= b$. Con esto las equaciones $xy = a$, y $x-y = b$ darán $x = \frac{\sqrt{(b^2+4a)}+b}{2} = 20$, y $y = \frac{\sqrt{(b^2+4a)}-b}{2} = 16$.

Por otro rumbo.

Sea z la mitad de la suma, y x la mitad de la diferencia de los dos números; el mayor será por consiguiente $z+x$, y el menor $z-x$, y por la cuestion será $(z+x) \times (z-x) = a$, y $(z+x)^3-(z-x)^3 = n \times (2x)^3$; esto es $z^2-x^2 = a$, $6z^2x+2x^3 = 8nx^3$; la última equa-

cion partida por $2x$ dá $3z^2+x^2=4nx^2$; y restando de esta el triplo de la primera, sale $4x^2=4nx^2-3a$; y por consiguiente $x=\sqrt{\left(\frac{3a}{4n-4}\right)}=2$. Luego $z=\sqrt{(a+xx)}=18$; y $z+x=20$, $z-x=16$; estos son los dos números que buscábamos.

232 Cuestion 21. *Un labrador ha cobrado 400 reales por una partida de trigo que ha vendido, y la misma suma por otra partida de cebada en que habia 16 fanegas mas, que ha dado 5 reales menos por fanega, ¿quantas fanegas ha vendido de cada grano?*

Llamo a lo que ha valido cada partida de grano;
b, la diferencia de las dos partidas;
c, la diferencia de precio por fanega;
x, el número de fanegas de trigo;

Partiendo todo el valor por el número de fanegas será $\frac{a}{x}$ el precio de cada fanega de trigo; será tambien $\frac{a}{x+b}$ el precio da cada fanega de cebada. Y como por la cuestion $\frac{a}{x}-\frac{a}{x+b}=c$, saldrá $ax+ab-ax=cx^2+bcx$, ó $\frac{ab}{c}=x^2+bx$. De donde sale $x=\sqrt{\left(\frac{ab}{c}+\frac{bb}{4}\right)}-\frac{b}{2}=32$, número de las fanegas de trigo; $x+16=48$ será el número de las fanegas de cebada.

233 Cuestion 22. *Un mercader ha comprado dos piezas de paño el uno mas fino que el otro; el mas fino le ha costado 4 pesos mas en vara que el otro, y toda la pieza 360 pesos; la pieza del otro paño en que hay 10 varas mas le ha costado 320 pesos, ¿quantas varas ha comprado de cada suerte?*

Sea x el número de varas del paño mas fino, é y los pesos que cuesta cada vara. Será $x+10$ las varas del paño inferior, é $y-4$ lo que cuesta cada vara. Por la cuestion tenemos $xy=360$, $(x+10)\times(y-4)=320$. La última equacion es $xy+10y-4x=$

360;

360; rebaxando de ella estotra $xy = 360$, sale $10y - 4x = 0$. Luego $10y = 4x$; $y = \frac{2x}{5}$. Substituyendo este valor de y en $xy = 360$, sale $\frac{2x^2}{5} = 360$, que dá $x = \sqrt{(900)} = 30$.

234 Cuestion 23. *Hallar dos números, tales que el producto de los dos es igual á la diferencia de los quadrados; y la suma de sus quadrados es igual á la diferencia de sus cubos.*

Sea x el menor de los dos números, y el mayor en la misma razon con él que y con la unidad, ó, lo que es lo propio, sea xy el mayor de los dos números. Por la cuestion es $x \times xy = x^2y^2 - x^2$ y $x^2y^2 + x^2 = x^3y^3 - x^3$; partiéndolas ambas por x^2 se reducen á estotras $y = y^2 - 1$, $y^2 + 1 = xy^3 - x$, y la primera de estas dos dá $y^2 - y = 1$; completando el quadrado, sale $y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, y por lo mismo $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pero la equacion $y^2 + 1 = xy^3 - x$ dá $x = \frac{yy+1}{yyy-1} = \frac{y+2}{2y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{(5)}-2}{4}$ (con multiplicar arriba y abaxo por $\sqrt{(5)} - 1$) $= \frac{\sqrt{5}}{2}$. Por consiguiente los dos números son $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ y $\frac{5+\sqrt{5}}{4}$.

235 Cuestion 24. *Dos correos* A *y* B *salen á un tiempo,* A *de Madrid para Zaragoza, y* B *de Zaragoza para Madrid; A llega á Zaragoza 9 horas despues que los dos se han encontrado, y* B *llega á Madrid 16 horas despues, ¿quantas horas ha tardado cada correo en su carrera?*

Sea x el número de horas que ha andado cada correo antes de encontrarse los dos; $a = 9$ y $b = 16$. Ya que por la primer parte de la cuestion ha andado A en a horas lo que B en x horas, diremos lo que A ha andado en a horas es á lo que anduvo en x horas, como lo que B anda en las x horas, á lo que an-

andará en las 9, ó $a : x :: x : \frac{xx}{a}$, tiempo que B tardará en andar la distancia que A ha andado en x horas. Por la segunda parte de la cuestion, B anda en 16 horas lo que A anduvo en x horas; luego $\frac{xx}{a} = b$; y $x = \sqrt{ab} = 12$; y por consiguiente A llegó en 21 horas á Zaragoza, y B en 28 á Madrid.

236 Cuestion 25. *De quatro números que están en progresion geométrica, la suma de los dos menores es 20, y la suma de los dos mayores es 45; hallar estos números.*

Sea x el primer número; y el tercero, $20 = a$, $45 = b$; el segundo número será $a - x$, y el quarto $b - y$. Los quatro términos de la progresion sentados por su órden serán $x, a - x$, $y, b - y$. Luego por la naturaleza de la proporcion tenemos $x \times (b - y) = (a - x) \times y$, $xy = (a - x)^2$. La primer equacion dá $y = \frac{bx}{a}$, substituyendo este valor en la segunda, sale $\frac{bx^2}{a} = (a - x)^2$, sacando la raiz quadrada $x\sqrt{\frac{b}{a}}$

$$= a - x; \text{ luego } x = \frac{a}{1 + \sqrt{\frac{b}{a}}} = 8. \text{ Luego los}$$

quatro números que buscamos son 8, 12, 18 y 27.

237 Cuestion 26. *Hemos de partir 700 reales entre quatro compañeros* A, B, C *y* D, *cuyas partes estén en progresion geométrica; la diferencia entre la parte mayor y la menor es á la diferencia de las dos del medio como 37 á 12. Hallar las quatro partes.*

Sea x la parte de A, ó el primer término de la progresion, cuya razon es la de 1 á y, $700 = a$, $37 = m$, $12 = n$.

Por la cuestion $x + xy + xy^2 + xy^3 = a$, y $xy^3 - x : xy^2 - xy :: m : n$, cuya proporcion dá $y^3 - 1 = (y - 1) \times \frac{my}{n}$, ó $y^2 + y + 1 = \frac{my}{n}$, con partirlo todo por

$y-1$. De aquí se saca $y=\frac{m-n+\surd(mm-2mn-3nn)}{2n}=\frac{25+7}{24}=\frac{4}{3}$. Luego $x=\frac{a}{1+y+y^2+y^3}=\frac{27\times700}{27+36+48+64}=108$. Luego las quatro partes son 108, 144, 192 y 256 reales.

238 Cuestion 27. *Hallar quatro números en progresion arismética, tales que la suma de los quadrados de los dos medios* $=400$, *y la suma de los quadrados de los dos extremos* $=464$.

Sea $400=a$, $464=b$; si llamo x el menor de los extremos, é y la diferencia de la progresion, los quatro números serán x, $x+y$, $x+2y$, $x+3y$. Tendré, pues, por la cuestion $(x+y)^2+(x+2y)^2=a$, y $x^2+(x+3y)^2=b$, ó 1.° $2x^2+6xy+5y^2=a$, y 2.° $2x^2+6xy+9y^2=b$; restando la primera de estas dos equaciones de la segunda sale $4y^2=b-a$; luego $y=\frac{\surd(b-a)}{2}=4$. Pero la equacion 1.° dá $x^2+3xy=\frac{a}{2}-\frac{5yy}{2}$; de la qual se saca, considerando y como conocida, $x=\surd\left(\frac{a}{2}-\frac{yy}{4}\right)-\frac{3y}{2}=8$. Son, pues, los quatro números que se piden 8, 12, 16 y 20.

239 Cuestion 28. *Hallar quatro números en progresion arismética, cuya suma es 56, y la suma de sus quadrados* $=864$.

Hago $56=b$, $864=c$; si llamo a la mitad de la suma de los dos números medios, y x su diferencia, los números mismos serán $a-x$ y $a+x$, y por la cuestion será $(a-3x)+(a-x)+(a+x)+(a+3x)=b$, $(a-3x)^2+(a-x)^2+(a+x)^2+(a+3x)^2=c$. De donde sale por reduccion $4a=b$, y $4aa+20xx=c$. Luego $a=\frac{b}{4}=14$, y $x=\surd\left(\frac{c}{20}-\frac{aa}{5}\right)=2$. Lo que dá á conocer que los números mismos son 8, 12, 16 y 20.

Por

Por el mismo método se resolverá la cuestion siempre que la progresion conste de 6, 8, 10 ú otro número par de términos, que llamarémos n.

Porque como la suma de los quadrados de los dos términos medios $(a - x)$ y $(a + x) = 2 \times (aa + xx)$, y $2 \times (aa + 9xx)$ la suma de los quadrados de los dos términos $(a - 3x)$ y $(a + 3x)$ inmediatos á los medios, y $2 \times (aa + 25xx)$ la suma de los quadrados de los dos términos $(a - 5x)$ y $(a + 5x)$ inmediatos á los dos últimos, tendrémos $2 \times (aa + xx) + 2 \times (aa + 9xx) + 2 \times (aa + 25xx)$ &c. $= c$, cuya equacion haciendo $1 + 4 + 9 + 16 + 25$, &c. hasta $\frac{n}{2}$ términos, $= f$ será $naa + 2fxx = c$. Lo que dá $x = \sqrt{\left(\frac{c - naa}{2f}\right)}$, y sale $a = \frac{b}{n}$, con lo que será tambien conocido el valor de x.

240 Cuestion 29. *Se despacha un propio para un parage que está* 140 *leguas lejos; el primer dia anda* 26 *leguas, el segundo* 24, *el tercero* 22, *y prosigue así su jornada en progresion arismética decreciente, andando* 2 *leguas menos cada dia, ¿en quantos dias llegará á su paradero?*

Llamo b la distancia 140, hago $c = 26$ las leguas andadas el primer dia, $d = 2$ lo que anda menos cada dia, diferencia de la progresion, y $x =$ el número de dias que gasta el propio.

La cuestion está diciendo que el propio andará el último dia el número de leguas menor que las que anda el primer dia todo lo que importa la diferencia d multiplicada por el número $x - 1$ de términos; por consiguiente la expresion del último dia será $c - (x - 1) \times d$. Pero la suma de una progresion arismética es igual á la suma del primero y último término multiplicada por la mitad de todos los términos; luego tendrémos $\left(c + c - (x - 1) \times d\right) \times \frac{x}{2}$ la ex-

expresion de todo el camino andado, y será $\left(2c-(x-1)\times d\right)\frac{x}{2}=b$, que dá $2cx-dx^2+dx=2b$, y $xx-\frac{2c+d}{d}\times x=\frac{2b}{d}$. De donde se saca $x=\pm\sqrt{\left(\frac{(2c+d)^2}{4dd}-\frac{2b}{d}\right)}+\frac{2c+d}{2d}=7$.

241 Cuestion 30. *Dos horas y tres quartos despues que salió el propio* A, *el qual anda* 4 *leguas por hora, sale otro propio* B *para alcanzarle; y con este empeño anda* $4\frac{1}{2}$ *leguas la primer hora*, $4\frac{3}{4}$ *la segunda*, 5 *la tercera, andando cada hora un quarto de legua mas, ¿en quantas horas el propio* B *alcanzará al propio* A?

Hago $a=4$ camino que anda A por hora, $b=11$, leguas andadas por A antes que B saliera; $c=4\frac{1}{2}$ leguas que anda B la primer hora; $d=\frac{1}{4}$ de legua, diferencia comun; x las horas que busco.

Por la última cuestion se infiere que el camino andado por B la última hora será $c+(x-1)\times d$; y $\left(2c+(x-1)\times d\right)\times\frac{x}{2}$ la expresion de todo el camino que B andará en x horas.

Pero como lo que A anda en x horas es ax, toda la distancia andada por A será $ax+b$, la qual por la cuestion es igual á la que anda B; luego $\left(2c+(x-1)\times d\right)\times\frac{x}{2}=ax+b$, por consiguiente $2cx+dx^2-dx=2ax+2b$; ó $xx+\frac{2c-2a-d}{d}\times x=\frac{2b}{d}$, que, con hacer $\frac{2c-2a-d}{d}=f$, se reduce á $x=\sqrt{\left(\frac{2b}{d}+\frac{ff}{4}\right)}-\frac{f}{2}=8$, número de horas que se busca.

Modo de extraer la raiz quadrada de las cantidades binomias.

242 Ademas de las equaciones mixtas de segundo

do grado, hay otras muchas de grado superior que se resuelven por el mismo método que ellas, y son todas las que llevan en el primer término el quadrado de la incógnita, ó de la potencia de la incógnita que está en el segundo, las quales ciframos en la siguiente fórmula $x^{2m} + bx^{m} = c$. Quando $m = 3$ la equacion es $x^6+bx^3 = c$; resuelta esta como una equacion mixta de segundo grado dará $x^3 = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{(c + \frac{bb}{4})}$, y sacando de cada miembro la raiz cúbica, sería $x = \sqrt[3]{(-\frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{bb}{4} + c)})}$.

Si fuese $m = 2$, la equacion sería $x^4+bx^2 = c$, de cuya resolucion sacarémos $x^2 = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{(c + \frac{bb}{4})}$. Claro está que para hallar el valor de x habria que sacar la raiz quadrada de cada miembro, lo que daría $x = \sqrt{(-\frac{b}{2} \pm \sqrt{(c + \frac{bb}{4})})}$. La cantidad $-\frac{b}{2} \pm \sqrt{(c + \frac{bb}{4})}$ compuesta de dos términos, el uno racional, y el otro irracional, es la que llamamos aquí *binomio*, cuyo nombre se dá á todas las que se le parecen.

Como el valor de la incógnita no se puede sacar de las equaciones que tienen la última forma sin extraer la raiz quadrada de un binomio, declararémos aquí como se hace esta operacion; resolviendo primero una cuestion que acabará de hacer patente su necesidad.

243 Cuestion. *Hallar dos números cuyo producto* $= 105$, *y la suma de sus quadrados* $= 274$.

Sea el un número x, y el otro y. La cuestion dá $xy = 105$, y $xx+yy = 274$; de la primera de estas dos equaciones sale $y = \frac{105}{x}$; si substituyo este valor de y en la segunda, saldrá $xx + \frac{(105)^2}{xx} = 274$; luego $x^4 + (105)^2 = 274xx$, ó $x^4 = 274xx - (105)^2$, cu-

cuya equacion resuelta por lo enseñado (208) dá $xx = 137 \pm \sqrt{(7744)}$, $x = \sqrt{[137 \pm \sqrt{(7744)}]}$, y para conocer x es preciso sacar la raiz quadrada del binomio $137 \pm \sqrt{(7744)}$. Busquemos, pues, una fórmula para hacer esta operacion en este y todos los demas casos.

Sea $m + \sqrt{n}$ el binomio cuya raiz quadrada se ha de sacar, y $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ su raiz; será, pues, $\sqrt{(m + \sqrt{n})} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, y quadrando, será $m + \sqrt{n} = x + y + 2\sqrt{xy}$; si suponemos, como es muy natural, que la parte racional del primer miembro es igual con la parte racional del segundo, y la parte irracional del primero con la irracional del segundo, sacarémos estas dos equaciones $x + y = m$, $2\sqrt{xy} = \sqrt{n}$. Quadremos ahora estas equaciones, lo que nos dará estotras dos $x^2 + 2xy + y = m^2$, y $4xy = n$. De la primera de estas dos resto la segunda, y sale $x^2 - 2xy + y^2 = m^2 - n$, lo que está diciendo que x é y serán comensurables siempre que $m^2 - n$ sea un quadrado, por ser un quadrado la cantidad $x^2 - 2xy + y^2$, cuya raiz es $x - y = \sqrt{(m^2 - n)}$; como poco ha hallé $x + y = m$, si sumo una con otra las dos últimas equaciones, saldrá $2x = m + \sqrt{(m^2 - n)}$, y $x = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - n)}$; si resto una de otra las dos mismas equaciones, saldrá $2y = m - \sqrt{(m^2 - n)}$, y $y = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}(m^2 - n)$. Luego $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{[\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - n)}]} + \sqrt{[\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - n)}]}$. Si el binomio fuese $m - \sqrt{n}$, la segunda parte de la fórmula llevaría el signo $-$.

Apliquémosla al caso propuesto, esto es, para sacar la raiz de la cantidad $137 \pm \sqrt{(7744)}$. Aquí $m = 137$, $\sqrt{n} = \sqrt{7744}$, $n = 7744$; $m^2 - n = 18769 - 7744 = 11025$; $-\sqrt{(m^2 - n)} = \sqrt{(11025)} = 105$; $\sqrt{(m + \sqrt{n})} = \sqrt{[\frac{1}{2}m \pm \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 - n)}]} = \sqrt{(\frac{242}{2})} \pm \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{(121)} \pm \sqrt{16} = 11 \pm 4$; luego x es 15 ó 7. En el primer caso $y = 7$, en el segundo $y = 15$. Luego los dos números que se piden son 15 y 7.

Pro-

Propóngome sacar por la fórmula el valor de $\sqrt{(7+\sqrt{48})}$. Aquí $m=7$, y $\sqrt{n}=\sqrt{48}$, por consiguiente $n=48$; luego $m^2-n=49-48=1$, y $\sqrt{(m^2-n)}=\sqrt{1}=1$. Haciendo en la fórmula las substituciones correspondientes, saldrá $\sqrt{(7+\sqrt{48})}$ $=\sqrt{(\frac{7}{2}+\frac{1}{2})}+\sqrt{(\frac{7}{2}-\frac{1}{2})}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$.

Si el binomio cuya raiz se pide fuese $4+2\sqrt{3}$, pasaría 2 debaxo del signo, y saldria $4+\sqrt{12}$, en cuyo supuesto $4=m$, $\sqrt{12}=\sqrt{n}$, y por consiguiente $n=12$. Executando las substituciones, saldrá que $\sqrt{[\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)}]}=\sqrt{3}$, y $\sqrt{[\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)}]}=1$; de donde se saca que $\sqrt{(4+2\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$, ó $-1-\sqrt{3}$.

Quando se haya de sacar la raiz de $8+2\sqrt{15}$, será $m=8$, $n=60$, y por lo mismo $\sqrt{[\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)}]}=5$, y $\sqrt{[\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)}]}=\sqrt{3}$. Luego $\sqrt{(8+2\sqrt{15})}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$, ó $-\sqrt{3}-\sqrt{5}$. De donde se sigue que $\sqrt{(4-2\sqrt{3})}=1-\sqrt{3}$, ó $\sqrt{3}-1$; y que $\sqrt{(8-2\sqrt{15})}=\sqrt{3}-\sqrt{5}$, ó $\sqrt{5}-\sqrt{3}$. En general, $\sqrt{(m-\sqrt{n})}=\sqrt{[\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)}]}-\sqrt{[\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)}]}$, ó $\sqrt{[\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)}]}-\sqrt{[\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\sqrt{(m^2-n)}]}$.

Sea por último $2\sqrt{-1}$ que no tiene parte racional; aquí $m=0$, $\sqrt{n}=\sqrt{-4}$, $n=-4$; luego $m^2-n=4$, y $\sqrt{(m^2-n)}=2$. Luego la raiz quadrada del binomio es $\sqrt{1}+\sqrt{-1}=1+\sqrt{-1}$; y con efecto el quadrado de $1+\sqrt{-1}$ es $1+2\sqrt{(-1)}-1$ $=2\sqrt{-1}$.

Equaciones indeterminadas de segundo grado.

247 Poco nos detendrémos en este asunto dilatadísimo por la multitud de casos varios, y de las dificultades muchas veces insuperables que incluye. Nos ceñirémos, pues, á manifestar en la reso-

solucion de unas pocas cuestiones indeterminadas algunos de los ingeniosos artificios á que han apelado los calculadores, y resolver una equacion indeterminada de segundo grado la mas general que pueda ofrecerse.

248 Desde luego será muy facil de resolver toda equacion de segundo grado con dos incógnitas x é y, siempre que sea lícito tomar por x é y números enteros ó quebrados, positivos ó negativos, racionales ó irracionales. Porque una vez tomado á arbitrio uno de los dos números, el otro se hallará solo con resolver por los métodos declarados antes de ahora una equacion determinada de segundo grado. Pero quando fuere condicion precisa que x é y sean números enteros, ó racionales por lo ménos quando sean fraccionarios, la cuestion es muy dificultosa y en muchos casos imposible de resolver. El principal artificio para resolverla, siempre que se pueda en números racionales, consiste en expresar las incógnitas por medio de las cantidades conocidas de la cuestion, y de una nueva incógnita escogida con tal tino, que en las equaciones que de aquí se originen, las incógnitas cuyo valor se busca no pasen del primer grado, y por lo mismo venga á parar la cuestion en resolver una equacion de primer grado. Esta regla tan general la darán á entender los exemplos.

249 Cuestion I. *Hallar dos números racionales, cuya suma sea á la de sus quadrados, como* m *á* n.

Sean x é y los dos números que busco; la cuestion me dá $x+y : x^2+y^2 :: m : n$, de donde saco la equacion indeterminada de segundo grado $nx+ny = mx^2+my^2$.

Tomo una nueva incógnita z, tal que sea $y = xz$; hágolo por considerar que si substituyo este valor de y en la equacion $nx+ny = mxx+myy$, todos los tér-

minos serán partibles por x, con lo que solo tendré que resolver equaciones de primer grado. Executo con efecto la expresada substitucion, y me sale $nx+nxz = mxx+mx^2z^2$; ó, con partirlo todo por x, $n+nz = mx+mxz^2$; de donde saco $x = \frac{n+nz}{m+mz^2}$; y (por ser $y = xz$), $y = \frac{nz+nz^2}{m+mz^2}$. Manifiesta estos valores de x é y que si tomo por z el número racional que yo quiera, x é y serán tambien números racionales.

Si hago v. gr. $m=1$, $n=2$, $z=1$; saco $x=2$, $y=2$; si hago $m=1$, $n=4$, $z=2$; saco $x=\frac{12}{5}$, $y=\frac{24}{5}$; si $m=1$, $n=3$, $z=4$, será $x=\frac{15}{17}$, $y=\frac{60}{17}$.

250 Cuestion 2. *Partir un quadrado dado en otros dos quadrados.*

Sea aa el quadrado dado, x é y las raices de los dos quadrados que buscamos; tendremos $xx+yy=aa$. Tomo una nueva incógnita z, tal que sea $y=a-xz$, ó $y=xz-a$, con la mira de que elevando cada miembro al quadrado, y substituyendo por yy su valor en la equacion fundamental, se destruyan unos á otros los términos donde está aa en cada miembro, y con esto baxe la equacion al primer grado. Y con efecto, despues de substituir $aa-2axz+z^2x^2$ por yy, sale $xx+aa-2axz+z^2x^2=aa$; y por consiguiente borrando aa en cada miembro, $xx-2axz+z^2x^2=0$, ó $x(x-2az+z^2x)=0$. De aquí se saca 1.° $x=0$, y por lo mismo $y=a$, cuyo valor resuelve la cuestion; 2.° $x=\frac{2az}{1+z^2}$. Luego si se tomó $y=a-xz$, será $y=\frac{a(1-z^2)}{1+z^2}$; y si se tomó $y=zx-a$, será $y=\frac{a(z^2-1)}{1+z^2}$. Esta resolucion dá para x é y números racionales, y es la que se buscaba.

Sea v. gr. $aa=25$, ó $a=5$, y hagamos $z=3$; se hallará desde luego $x=3$; y substituyendo por z y a sus valores en $y=\frac{a(z^2-1)}{1+z^2}$ será $y=4$. Sea

a

$a=6$, $z=2$, será $x=\frac{24}{5}$, $y=\frac{18}{5}$.

251 Cuestion 3. *Hallar dos quadrados cuya diferencia sea igual á un quadrado dado.*

Sea aa el quadrado propuesto, x é y las raices de los dos que buscamos; si suponemos y mayor que x, será $yy-xx=aa$. Hagamos $y=a+zx$, y por lo mismo $yy=a^2+2axz+z^2x^2$. Si se substituye este valor de yy en la equacion antecedente, y se borran las cantidades que se destruyen, tendremos $2azx+z^2x^2-x^2=0$, ó $x(2az+z^2x-x)=0$. De aqui se saca 1.° $x=0$, $y=a$; 2.° $x=\frac{2az}{1-z^2}$, $y=\frac{a(1+z^2)}{1-z^2}$, cuyos valores manifiestan que z se ha de tomar menor que 1, para que los números x é y salgan positivos.

Sea $a=4$, y hagamos $z=\frac{1}{3}$, saldrá $x=3$, $y=5$.

252 Cuestion 4. *Hallar dos números, tales que la suma del quadrado del uno y del producto del quadrado del otro por un número dado* b, *sea igual á un quadrado dado* aa.

Sean x é y los dos números que se nos piden. Las condiciones de la cuestion dán $xx+by^2=aa$. Hago $x=a-zy$, ó $x=zy-a$; y por consiguiente $xx=aa-2azy+z^2y^2$. Despues de substituido este valor en la equacion antecedente, y borradas las cantidades que se destruyen, sale $y(z^2y-2az+by)=0$. De donde se saca 1.° $y=0$, y por consiguiente $x=a$; 2.° $y=\frac{2az}{b+z^2}$, y por consiguiente $x=\pm\frac{a(b-z^2)}{b+z^2}$. Qualquiera número racional que se tome por z, saldrán tambien racionales los valores de x é y.

253 Cuestion 5. *Hallar dos números, tales que si del quadrado del uno se resta el producto del quadrado del otro por el quadrado de un numero dado* b, *la resta sea igual á un número dado* a.

Llamo x é y los dos números; por la cuestion

será $xx - b^2y^2 = a$. Hagamos $x = z - by$, y por consiguiente, $xx = zz - 2bzy + b^2y^2$. Despues de substituido este valor en la equacion antecedente, y borradas las cantidades que se destruyen, sale $zz - 2bzy = a$. Luego $y = \frac{zz-a}{2bz}$, $x = \frac{zz+a}{2z}$.

254 Cuestion 6. *Partir la suma de dos quadrados en otros dos quadrados.*

Sean aa y bb los dos quadrados propuestos, xx é yy los dos quadrados que vamos á buscar; será $xx + yy = aa + bb$. Tomaremos otros dos números z y u, tales que sea $x = a - z$, $y = zu - b$, y por consiguiente $xx = aa - 2az + zz$, $yy = z^2u^2 - 2bzu + bb$. Despues de substituidos estos valores de xx é yy en la equacion fundamental, y borradas las cantidades que se destruyen, saldrá $-2az + zz + z^2u^2 - 2bzu = 0$. De aquí sale 1.° $z = 0$, lo que daría $x = a$, $y = -b$; 2.° $z = \frac{2a+2bu}{1+uu}$; luego $x = \frac{auu-a-2bu}{1+uu}$, é $y = \frac{2au+bu^2-b}{1+uu}$. Si tomamos por u un número racional, sea el que fuere, saldrán tambien racionales los valores de x é y.

255 Cuestion 7. *Dada la equacion general de segundo grado indeterminada* $at^2 + btx + cx^2 + dt + ex + f = 0$ *en la qual* a, b, c, d, e, f *son números enteros conocidos,* t, y, x *números incógnitos; sacar de ella en números racionales los valores* t, y, x.

Saco de la equacion propuesta los valores de la una de las incógnitas, de t v. gr. y sale $t = -\frac{(bx+d) \pm \sqrt{[(bx+d)^2 - 4a(cx^2+ex+f)]}}{2a}$. Ya se ve que si x fuese un número racional, t lo será tambien, si se consigue hacer que la cantidad que el signo radical cubre sea un quadrado perfecto, y que por lo mismo se pueda sacar su raiz quadrada. Pero la cantidad que el radical cubre es, despues de executadas

las

las operaciones indicadas, $b^2x^2+2bdx+dd-4acx^2-4aex-4af$. Para abreviar, hagamos las cantidades dadas $b^2-4ac=g$, $2bd-4ae=h$, $dd-4af=k$; tendremos la transformada $t=-\frac{(bx+d)\pm\sqrt{(gx^2+hx+k)}}{2a}$; y el objeto de la cuestion será cumplir con la equacion $yy=gx^2+hx+k$, tomando por x é y números racionales.

Puede haber entre las cantidades g, h, k tales relaciones que sea imposible sacar racional el valor de y, aunque se tome por x un número que lo sea; no obstante vamos á especificar muchos casos en que se puede lograr el intento.

1.° Sea $k=0$, y por consiguiente $yy=gx^2+hx$; con hacer $gx^2+hx=x^2z^2$, tendremos $x=\frac{h}{z^2-g}$ número racional, é $y=\frac{hz}{z^2-g}$, otro número racional. El número arbitrario z siempre se podrá tomar tal, que x é y sean números positivos.

2.° Sea g un quadrado cabal que llamaremos mm, siendo h y k lo que se quiera; será $yy=mmxx+hx+k$. Haremos $\sqrt{(mmxx+hx+k)}=mx+z$; de donde sacaremos $x=\frac{zz-k}{h-2zm}$, número racional, é $y=\frac{m(zz-k)}{h-2zm}+z=\frac{hz-mzz-mk}{h-2zm}$, otro número racional.

3.° Sea k un quadrado cabal que llamaremos nn, siendo g y h lo que se quiera; será $yy=gx^2+hx+nn$. Haremos $\sqrt{(gx^2+hx+nn)}=xz+n$; de donde se saca $x=\frac{h-2nz}{z^2-g}$, número racional, é $y=\frac{hz-gn-nzz}{z^2-g}$, otro número racional.

4.° Los valores de x é y se pueden sacar en números racionales, siempre que h^2-4kg sea un quadrado cabal. Busquemos, para probarlo, los dos factores de la cantidad gx^2+hx+k, considerándola como el primer miembro de una equacion de segundo grado, cuyo segundo miembro es cero. Sacaremos

$x = -\frac{h}{2g} \pm \frac{\sqrt{(h^2-4kg)}}{2g}$, y por consiguiente $gx^2 + hx + k = \left(gx + \frac{h}{2g} - \frac{\sqrt{(h^2-4kg)}}{2}\right) \times \left(x + \frac{h}{2g} + \frac{\sqrt{(h^2-4kg)}}{2g}\right)$, conforme lo comprobará el que executare la multiplicacion. Por donde se echa de ver que con suponer que h^2-4kg sea un quadrado que llamaremos pp, y hacer, para abreviar, $\frac{h}{2g} - \frac{p}{2g} = q$, $\frac{h}{2g} + \frac{p}{2g} = r$, será $gx^2 + hx + k = (gx+gq) \times (x+r)$, en cuya expresion todas las cantidades son números racionales. Hagamos ahora $\sqrt{(gx^2+hx+k)}$, ó $\sqrt{[(gx+gq)\times(x+r)]} = z(gx+gq)$; lo que dá $(gx+gq)\times(x+r) = z^2(gx+gq)^2$, ó $x+r = z^2(gx+gq)$, y por consiguiente $x = \frac{zzgq-r}{1-gzz}$, número racional. Luego $y = z(gx+gq) = \frac{gqz-grz}{1-gzz}$, otro número racional.

5.° Tambien se pueden sacar racionales los valores de x é y siempre que la cantidad gx^2+hx+k puede considerarse como la suma de un quadrado y de un producto formado de factores racionales; quiero decir, siempre que se la puede reducir á esta forma $(mx+l)^2 + (\alpha x+\beta)(\delta x+\epsilon)$. Porque entónces, con hacer $\sqrt{(gx^2+hg+k)}$ ó $\sqrt{[(mx+l)^2+(\alpha x+\beta)\times(\delta x+\epsilon)]} = mx+l+z(\alpha x+\beta)$, se saca $(mx+l)^2+(\alpha x+\beta)\times \delta x+\epsilon) = (mx+l)^2+2(mx+l)z(\alpha x+\beta)+z^2(\alpha x+\beta)^2$; de donde se saca $x = \frac{2lz+\beta zz-\epsilon}{\delta-2mz-\alpha zz}$, número racional. Será tambien y un número racional, una vez que $y = mx+l+z(\alpha x+\beta)$.

256 Cuestion 8. *Un tabernero compra vino de dos suertes; la arroba del uno le cuesta* a, *la arroba del otro* b; *paga por toda la partida un quadrado incógnito, tal que si se le añade un número dado* d, *la*

la suma es un quadrado cuya raiz es el número de todas las arrobas, ¿quantas arrobas compró al precio a, *y quantas al precio* b?

Llamo t el número de todas las arrobas, u el número de las arrobas al precio b, y por consiguiente será $t-u$ el número de las arrobas al precio a. Claro está que todas las arrobas al precio b han costado bu; y todas las del precio a, han costado $at-au$. Sea xx el quadrado incógnito igual al valor de todas; será desde luego $xx = bu+at-au$. Pero por otra parte $\sqrt{(xx+d)} = t$, ó $xx = tt-d$. Luego comparando los dos valores de xx, tendremos $bu+at-au = tt-d$. Supongamos $a>b$; esto es a mayor que b; del mismo modo discurriríamos si fuese $a<b$; esto es, a menor que b. la equacion $bu+at-au = tt-d$ dá $u = \frac{at-(tt-d)}{a-b}$, y $t-u = \frac{tt-d-bt}{a-b}$.

Como $tt-d$ ha de ser un número quadrado, doy á su raiz esta forma $z-t$, ó estotra $t-z$, de donde saco $tt-2tz+zz = tt-d$, y por consiguiente $t = \frac{zz+d}{2z}$. Tomando, pues, por z un número racional, saldrá tambien racional el valor de t. Pero z se ha de tomar con la circunstancia que u y $t-u$ sean números positivos.

Por la primer condicion es preciso que $\frac{at-(tt-d)}{a-b} > 0$, (con multiplicar cada miembro por $a-b$), $at-(tt-d)>0$, ó $tt-d-at<0$, ó $tt-at<d$, ó $tt-at+\frac{aa}{4}<d+\frac{aa}{4}$, ó (con extraer de cada lado la raiz quadrada), $t-\frac{a}{2}<\sqrt{\left(d+\frac{aa}{4}\right)}$, ó finalmente $t<\frac{a}{2}+\sqrt{\left(d+\frac{aa}{4}\right)}$.

Por la segunda condicion ha de ser $\frac{tt-d-bt}{a-b}>0$, ó $tt-d-bt>0$, ó $tt-bt>d$, ó $tt-bt+\frac{bb}{4}>d$

$+\frac{bb}{4}$, ó (con extraer la raiz quadrada de cada lado), $t-\frac{b}{2}>\sqrt{\left(d+\frac{bb}{4}\right)}$, ó finalmente $t>\frac{b}{2}+\sqrt{\left(d+\frac{bb}{4}\right)}$.

Es, pues, preciso tomar t ó $\frac{zz+d}{2z}$ entre los dos límites que acabamos de señalar. Una vez hallado el valor de t, se le substituirá en las expresiones de u y $t-u$; y se sabrá las arrobas de vino de cada suerte.

Supongamos v. gr. $a=8$, $b=5$, $d=60$, será $t<4+\sqrt{76}$, y $t>\frac{5+\sqrt{265}}{2}$. Tomemos el número quadrado inmediatamente menor que 76, y el número quadrado inmediatamente mayor que 265, cuyos dos quadrados son 64 y 289, y sus raices 8 y 17. Será $4+\sqrt{64}=12$, y $\frac{5+\sqrt{289}}{2}=\frac{22}{2}=11$. Por donde se echa de ver que los números enteros entre los quales esta t son 12 y 11; tendremos, pues, $\frac{zz+60}{2z}<12$, y $\frac{zz+60}{2z}>11$, de donde se saca $z<12+84$, y $z>11+\sqrt{61}$. Tomemos el quadrado 81 inmediatamente menor que 84, y el quadrado 64 inmediatamente mayor que 61; echaremos de ver que z cabe entre 21 y 19. Si hacemos $z=20$, será $t=\frac{23}{2}$, $u=\frac{79}{12}$, $t-u=\frac{59}{12}$.

Fórmula para resolver las equaciones de tercer grado.

257 Cuestion I. *Dado el producto* a, *y la suma* b *de los cubos de dos números, hallar los dos números.*

Sean	1	x el mayor, y el menor de los dos números	
	2	$xy=a$	(cuestion)
	3	$x^3+y^3=b$	(cuestion)
$2()^3$	4	$x^3y^3=a^3$	

$3(\ )^2$	5	$x^6+2x^3y^3+y^6=b^2$
$4\times(4)$	6	$4x^3y^3=4a^3$
$5-6$	7	$x^6-2x^3y^3+y^6=b^2-4a^3$
$7\sqrt[2]{}$	8	$x^3-y^3=\sqrt{(b^2-4a^3)}$
$8+3$	9	$2x^3=b+\sqrt{(b^2-4a^3)}$
$9\div(2)$	10	$x^3=\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(b^2-4a^3)}$
$10\sqrt[3]{}$	11	$x=\sqrt[3]{\left[\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(b^2-4a^3)}\right]}$
$2\div x$	12	$y=\frac{a}{x}$
	13	$y=\frac{a}{\sqrt[3]{\left[\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(b-4a^3)}\right]}}$

De aquí es facil de sacar la fórmula de Cardano para la resolucion de las equaciones de tercer grado.

Porque si hacemos $z=x+y$, y cubicamos, saldrá $z^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=x^3+y^3+3xy\times(x+y)=x^3+y^3+3a\times z$, despues de substituir a en lugar de xy, y z en lugar de $x+y$. Si trasladamos, sacaremos $z^3-3az=x^3+y^3=b$. De donde resulta que $z=x+y$ es $=\sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\sqrt{(bb-4a^3)}\right]}+\frac{a}{\sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\sqrt{(bb-4a^3)}\right]}}$, cuya expresion es el verdadero valor de la raiz de la equacion $z^3-3az=b$.

La misma fórmula dará la raiz de la equacion $z^3+cz=b$, cuyo segundo término es positivo, con hacer $-3a=c$, y substituyendo en lugar de a, $-\frac{1}{3}c$, con lo qual será $z=\sqrt[3]{\left\{\frac{b}{2}+\sqrt{\left[\frac{bb}{4}+\left(\frac{c}{3}\right)^3\right]}\right\}}-\frac{\frac{1}{3}c}{\sqrt[3]{\left\{\frac{b}{2}+\sqrt{\left[\frac{bb}{2}+\left(\frac{c}{3}\right)^3\right]}\right\}}}$. Acerca de esta fórmu-

la

la hay varias consideraciones que hacer; se hallan en el tomo tercero de mis Elementos.

258 Cuestion 2. *Dada la diferencia 4 de dos números, y la suma 2240 de sus cubos, hallar los números.*

Llamo x la mitad de la suma, y d la mitad de la diferencia; será, pues, $x+d$ el número mayor, y el menor $x-d$.

Por consiguiente $(x+d)^3 + (x-d)^3 = 2240$; esto es, $2x^3+6d^2x = 2240$, ó $x^3+3d^2x = 1120$. Hago $c = 3d^2 = 12$, y $b = 1120$. De aquí se originará la equacion $x^3 + cx = b$. Luego por la fórmula $x = \sqrt[3]{\left\{\frac{b}{2} + \sqrt{\left[\frac{b^2}{4} + \left(\frac{c}{3}\right)^3\right]}\right\}} - \ldots\ldots$

$$\frac{\frac{1}{3}c}{\sqrt[3]{\left\{\frac{b}{2} + \sqrt{\left[\frac{bb}{4} + \left(\frac{c}{3}\right)^3\right]}\right\}}} = 10.$$ Luego $12 = x+d$, y $8 = x-d$ son los dos números.

259 Cuestion 3. *Partir el número 24 en dos partes, que la diferencia de sus cubos sea 3584.*

Llamo $24 = 2a$, y $3584 = 2b$. Será $a+x$ el número ó la parte mayor, y $a-x$ la parte menor, y por consiguiente $(a+x)^3 - (a-x)^3 = 2b$; esto es, $6a^2x+2x^3 = 2b$, ó $x^3+3a^2x = b$. Hago $c = 3a^2$, y $\sqrt[3]{\left\{\frac{b}{2} + \sqrt{\left[\frac{bb}{4} + \left(\frac{c}{3}\right)^3\right]}\right\}} = r$. Luego $x^3 + cx = b$, y $x = r - \frac{\frac{1}{3}c}{r} = 4$ por la fórmula. Por consiguiente 8 y 16 son los dos números que buscábamos.

Prin-

Principios de la aplicacion del Algebra á la Geometría.

260 Las aplicaciones del Algebra son muchas, pero aquí nos ceñirémos á dos principales. Manifestarémos 1.° como concuerdan los cálculos algebráicos con las operaciones de la Geometría Elemental, por lo tocante á la medida de la extension; 2.° como se hallan expresadas con lineas las raices de las equaciones de primero y segundo grado.

I. Si representa en general $r : c$ la razon entre el radio y la circunferencia de un círculo; la circunferencia de otro círculo qualquiera cuyo radio sea A, será $\frac{cA}{r}$, y su superficie será $\frac{cA}{r} \times \frac{1}{2} A$ por lo demostrado en la Geometría, ó $\frac{cA^2}{2r}$. Manifiesta esta expresion que las superficies de los círculos crecen como los quadrados de los radios; porque como el valor de $\frac{c}{2r}$ es siempre uno mismo, la cantidad $\frac{cA^2}{2r}$ solo crece á proporcion de lo que crece A^2.

261 Si fuese H la altura de un cilindro, y A el radio de su basa, será $\frac{cA^2}{2r} \times H$ la expresion de su solidez (*Geom.*); por la misma razon será $\frac{ca^2}{2r} \times b$ la expresion de la solidez de otro cilindro, cuya altura sea b y a el radio de su basa. Será, pues, la solidez del uno de estos dos cilindros á la del otro $:: \frac{cA^2}{2r} \times H : \frac{ca^2}{2r} \times b :: A^2H : a^2b$, con suprimir el factor comun $\frac{c}{2r}$; quiero decir que las solideces de los cilindros son como los productos de sus alturas por los quadrados de los radios de sus basas.

Si

Si las alturas fuesen proporcionales á los radios de las basas, sería $A : a :: H : b$, y por consiguiente $b = \frac{aH}{A}$, y la razon $A^2H : a^2b$ sería $A^2H : \frac{a^3H}{A}$, ó, con suprimir el factor comun H, y eliminar el denominador A, sería :: $A^3 : a^3$, y quiere decir que en este supuesto las solideces serán como los cubos de los radios de las basas.

En general, las superficies, segun queda probado en la Geometría, consisten en el producto de dos dimensiones, y los sólidos se sacan por el producto de tres; por lo que, si cada dimension del uno de los sólidos, ó de la una de las dos superficies que se comparan tuviese con cada dimension de la otra la misma razon, las dos superficies tendrán una con otra la razon de los quadrados, y los sólidos la razon de los cubos de dos dimensiones homólogas.

Esto demuestra de un modo general que las superficies de las figuras semejantes son como los quadrados de dos de sus dimensiones homólogas, y las solideces de los sólidos semejantes como los cubos de las mismas dimensiones. Porque, sean las que fueren las tales figuras, ó los tales sólidos, las primeras siempre se pueden considerar como compuestas de triángulos semejantes (*Geom.*), cuyas alturas y bases son proporcionales en cada figura; y los sólidos se pueden considerar como compuestos de pirámides semejantes, cuyas tres dimensiones son tambien proporcionales. Es, pues, sumamente facil comparar las cantidades, una vez sacada su expresion algebráica, no solo quando las cantidades son de una misma especie, mas tambien quando son de especie diferente, como un cono y una esfera, un prisma y un cilindro; bien entendido, que es indispensable sean de una misma natura-

raleza, esto es, ambas sólidos, ó ambas superficies.

262 Si en virtud de lo que enseñamos (*Geom.*) para hallar la solidez de una pirámide truncada, ó de un cono truncado, llamamos H la altura de la pirámide entera; h, la altura de la pirámide quitada; S, la superficie de la basa inferior; s, la de la basa superior, tendremos (*Geom.*) $S : s :: H^2 : h^2$, y por lo mismo $h^2 = \frac{H^2 s}{S}$, ó $h = H\sqrt{\frac{s}{S}}$. Si llamamos K la altura del trozo, tendremos $K = H - h$, y por consiguiente $K = H - H\sqrt{\frac{s}{S}}$, ó $K = \frac{H\sqrt{S} - H\sqrt{s}}{\sqrt{S}}$, de donde sacaremos $H = \frac{K\sqrt{S}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}$. Pero la solidez de la pirámide total es (*Geom.*) $S \times \frac{H}{3}$, y la de la pirámide quitada es $s \times \frac{h}{3}$, ó (poniendo en lugar de h su valor sacado poco ha) $s \times \frac{H}{3} \sqrt{\frac{s}{S}}$; luego la solidez del trozo será $\frac{HS}{3} - \frac{HS\sqrt{s}}{3\sqrt{S}}$, ó $\frac{H}{3}\left(S - \frac{s\sqrt{s}}{\sqrt{S}}\right)$, ó finalmente $\frac{H}{3}\left(\frac{S\sqrt{S} - s\sqrt{s}}{\sqrt{S}}\right)$. Pongamos ahora en lugar de H su valor hallado poco ha, y sacaremos $\frac{K\sqrt{S}}{3(\sqrt{S} - \sqrt{s})} \times \left(\frac{S\sqrt{S} - s\sqrt{s}}{\sqrt{S}}\right)$, que, con omitir arriba y abaxo el factor comun $\sqrt{S}$, se reduce á $\frac{K}{3} \times \left(\frac{S\sqrt{S} - s\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}\right)$, y partiendo por $\sqrt{S} - \sqrt{s}$, se reduce á $\frac{K}{3}\left(S + \sqrt{Ss} + s\right)$, cuya expresion está diciendo que toda pirámide, ó todo cono truncado se compone de tres pirámides de una misma altura, de las quales la una tiene por basa la basa inferior S del trozo, la otra la basa superior s, y la tercera una media proporcional $\sqrt{Ss}$ entre la basa superior s y la inferior S; porque para sacar la solidez de estas tres pirámides bastaría, una vez que todas tienen una misma altura, multiplicar la suma $S + \sqrt{Ss} + s$ de las tres basas por el tercio $\frac{K}{3}$ de la altura comun, y se sacaría

Fig. ría lo misma cantidad que acabamos de hallar.

263 Si llamamos a el radio de una esfera, será (*Geom.*) $\frac{ca^2}{2r}$ la superficie de su círculo máxìmo; $\frac{4ca^2}{2r}$ ó $\frac{2ca^2}{r}$ será (*Geom.*) la superficie de la misma esfera, y por consiguiente $\frac{ca^2}{2r} \times \frac{4}{3}a$, ó $\frac{c}{2r} \times \frac{4a^3}{3}$ será su solidez (264).

264 II. Veamos ahora como se hallan en lineas las raices de las equaciones determinadas de primero y segundo grado, cuya operacion se llama *construir dichas equaciones.* Por lo que mira á las equaciones determinadas de tercero y quarto grado, y á las equaciones indeterminadas, acuda el que quisiere al tomo tercero de mis Elementos.

Supongamos que se nos ofrezca construir la expresion $x = a+b-c$; tiraremos una linea recta DC, y desde uno de sus puntos A tomaremos $AB = a$,
1. y $BC = b$ ácia el extremo C. Despues tomaremos desde C ácia D ó A la porcion $CE = c$, la qual será negativa respecto de AB y BC, por seguir direccion contraria á la de estas lineas, y será $AE = AB+BC-CE = a+b-c = x$.

265 Si hubiésemos de construir la expresion $x = \frac{ab}{c}$, en la qual a, b, c representan lineas conocidas, formaríamos con las dos lineas indefinitas AZ, AX un ángulo qualquiera; sobre la una de ellas AX
2. tomaríamos una parte AB igual con la linea que representa c; tomaríamos despues otra parte AD igual con qualquiera de las dos lineas a, b v. gr. con a; sobre la otra linea AZ tomaríamos una parte AC igual con la linea b. Hecho esto, por los extremos B y C de la primera y tercer linea tiraríamos la linea BC; por el extremo D de la segunda, la linea DE paralela á BC; y la parte AE que determinaria en la AZ se-

sería el valor de $x = \frac{ab}{c}$; porque las paralelas DE, BC dan esta proporcion $AB : AD :: AC : AE$, esto es $c : a :: b : AE$; *luego* $AE = x = \frac{ab}{c}$. Por consiguiente se reduce la operacion á hallar una quarta proporcional á las tres lineas dadas c, a, b.

266 Infiérese de aquí que si se ofreciese construir $x = \frac{aa}{c}$; sería este caso el mismo que el primero; no habria mas diferencia que el ser iguales las lineas a y b.

267 Para construir $x = \frac{ab + db}{c + d}$, considero que esta cantidad es la misma que $\frac{(a+d)b}{c+d}$; considerando, pues, $a+b$ como una sola linea $= m$, y $c+d$ tambien como una sola linea $= n$, quedará reducida la equacion á $x = \frac{bm}{n}$, que ya sabemos como se construye.

268 Si fuese $x = \frac{aa - bb}{c}$, consideraré que $aa - bb$ es lo mismo que $(a+b)(a-b)$, por lo que la equacion será $x = \frac{(a+b)(a-b)}{c}$, y para construirla se buscará una quarta proporcional á las lineas c, $a+b$ y $a-b$.

269 Para construir la equacion $x = \frac{abc}{de}$, la pondré en esta forma $x = \frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$, y despues de construida $\frac{ab}{d}$, conforme queda enseñado, llamaré m la linea $\frac{ab}{d}$, con lo que $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$ será $\frac{cm}{e}$, que ya dexamos enseñado como se construye.

270 Por consiguiente, para construir $x = \frac{a^2 b}{c^2}$, la pondremos en esta forma $x = \frac{a^2}{c} \times \frac{b}{c}$, construiremos $\frac{a^2}{c}$, y llamando m su valor, construiremos despues $\frac{mb}{c}$.

De

Fig. 271 De lo dicho hasta aquí se evidencia que todo el artificio de estas construcciones está en resolver la cantidad propuesta en porciones que cada una de ellas tenga esta forma $\frac{ab}{c}$ ó $\frac{a^2}{c}$; y aunque ocurren casos donde puede parecer dificultosa esta resolucion, sin embargo se consigue con facilidad por medio de las transformaciones.

Supongo v. gr. que se me ofrezca construir $\frac{a^3+b^3}{a^2+c^2}$; supondré á arbitrio $b^3 = a^2m$, y $c^2 = an$, con lo qual $\frac{a^3+b^3}{a^2+c^2}$ se transformará en $\frac{a^3+a^2m}{a^2+an}$, cuya cantidad es la misma que $\frac{a^2+am}{a+n}$ ó $\frac{(a+m)a}{a+n}$ facil de construir despues de lo dicho, donde son conocidas m y n, cuyos valores se sacan de las equaciones $b^3 = a^2m$, y $c^2 = an$, las quales dan $m = \frac{b^3}{a^2}$, y $n = \frac{c^2}{a}$, que ya sabemos construir.

Por consiguiente siempre que la expresion por construir sea racional, esto es, no tenga radicales, y el número de las dimensiones del numerador no sea sino una unidad mayor que el número de las dimensiones del denominador, se reduce su construccion á buscar una quarta proporcional á tres lineas dadas.

272 Veamos ahora como se construyen las cantidades radicales de segundo grado.

Sea la primera $x = \sqrt{ab}$. Tiraremos una linea indefinita AB, tomaremos en ella, una á continuacion de otra, las partes $CA = a$, y $BC = b$; sobre
3. la linea AB como diámetro trazaremos un semicírculo que corte en D la perpendicular CD levantada á la AB en el punto C; será CD el valor de $\sqrt{ab}$; manifestando esta construccion que para sacar el valor de $\sqrt{ab}$, debe buscarse una media proporpor-

porcional entre las dos cantidades a y b. Sabemos con efecto (*Geom.*) que $AC : CD :: CD : CB$, ó $a : CD :: CD : b$; luego multiplicando extremos y medios, sale $(CD)^2 = ab$, y por lo mismo $CD = x = \sqrt{ab}$. Fig. 3.

273 Si fuese $x = \sqrt{(3ab+b^2)}$, repararé que esta cantidad es la misma que $\sqrt{[(3a+b) \times b]}$; tomaré, pues, una media proporcional entre $3a+b$ y b.

274 Se me propone que construya la equacion $x = \sqrt{(aa-bb)}$. Reparo desde luego que el segundo miembro es $\sqrt{[(a+b) \times (a-b)]}$; luego tomaré una media proporcional entre $a+b$ y $a-b$. Si se me propone $x = \sqrt{(a^2+bc)}$, haré $bc = am$, y será $\sqrt{(a^2+bc)} = \sqrt{(a^2+am)} = \sqrt{[(a+m) \times a]}$; tomaré por lo mismo una media proporcional entre $a+m$ y a, despues de sacado el valor de m por las reglas dadas antes.

275 Tambien se podria construir la equacion $x = \sqrt{(a^2+b^2)}$, haciendo $b^2 = am$, despues de lo qual construiríamos $\sqrt{(a^2+am)}$ por lo dicho últimamente. Pero la propiedad del triángulo rectángulo nos suministra una construccion mas sencilla, y es la siguiente.

Tírese una linea AB igual á la linea a, y en su extremo A levántese una perpendicular AC igual á la linea b; tírese despues la BC, esta linea será el valor de $\sqrt{(a^2+b^2)}$. Porque por la propiedad del triángulo CAB rectángulo en A, tenemos (*Geom.*) $(BC)^2 = (AB)^2+(AC)^2 = a^2+b^2$; luego $(BC) = \sqrt{(a^2+b^2)}$. 4.

276 Tambien se puede construir $\sqrt{(a^2-b^2)}$ por medio del triángulo rectángulo; con esta mira se tirará una linea $AB = a$; sobre el diámetro AB se trazará el semicírculo ACB; desde el punto A se tirará una cuerda $AC = b$; finalmente se tirará la BC, que será el valor de $\sqrt{(a^2-b^2)}$. Porque del triángulo rectángulo ABC sacamos (*Geom.*) $(AB)^2 = (AC)^2$ 5.

Fig. $+(BC)^2$; luego $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = a^2 - b^2$; luego $BC = \sqrt{(a^2 - b^2)}$.

277 Tambien se puede construir $\sqrt{(a^2+bc)}$ por un método distinto del propuesto poco ha. Hágase $bc = m^2$, y constrúyase $\sqrt{(a^2+m^2)}$, conforme hemos enseñado poco ha. Pero primero se ha de determinar m tomando una media proporcional entre b y c, conforme se indicia de la equacion $bc = m^2$ que dá $m = \sqrt{bc}$.

278 Aun quando incluye el radical mas de dos términos se consigue su construccion por alguno de los métodos enseñados. Supongo que se me ofrezca construir $x = \sqrt{(a^2+bc+ef)}$; haré $bc = am$, $ef = an$, y tendré $\sqrt{(a^2+bc+ef)} = \sqrt{(a^2+am+an)} = \sqrt{[(a+m+n)a]}$, cuya expresion se construirá tomando una media proporcional entre a y $a+m+n$, despues de determinados los valores de m y n por medio de las equaciones $m = \frac{bc}{a}$, $n = \frac{ef}{a}$.

279 Tambien se podria hacer $bc = m^2$ y $ef = n^2$, y la expresion por construir entonces sería $\sqrt{(a^2+m^2+n^2)}$. Pero quando el radical incluye una serie de quadrados positivos como este $\sqrt{(a^2+m^2+n^2+p^2)}$, se hace $\sqrt{(a^2+m^2)} = b$; $\sqrt{(b^2+n^2)} = i$; $\sqrt{(i^2+p^2)} = k$, y se prosigue á este tenor; y como cada una de estas cantidades queda determinada por la antecedente, la última dará el valor de $\sqrt{(a^2+m^2+n^2+p^2+\&c.)}$. Para construir estas cantidades por un método muy sencillo, se considera succesivamente cada hipote-
6. nusa como un lado; despues de tomar $AB = a$, y levantar la perpendicular $AC = m$, y tirar la BC, que será b, se levantará en el punto C á la BC la perpendicular $CD = n$, y despues de tirar la BD, que será i, se levantará en su extremo D á la BD la perpendicular $DE = p$, y BE será k, ó $\sqrt{(a^2+m^2+n^2+p^2)}$.

Si alguno de los quadrados que cubre el radical fuese negativo, se tendrá presente lo dicho para construir $\sqrt{(a^2-b^2)}$. Fig.

280 Finalmente, si ocurriese construir una cantidad de esta forma, $\frac{a\sqrt{b+c}}{\sqrt{(d+e)}}$, se la transformará en $\frac{a\sqrt{[(b+c)(d+e)]}}{d+e}$, multiplicando ambos términos por $\sqrt{(d+e)}$; buscando despues una media proporcional á $b+c$ y $d+e$, y llamándola m, la expresion por construir sería $\frac{am}{d+e}$.

281 Prevenimos que todas las reglas dadas en este asunto no son mas que reglas generales; en muchos casos se pueden construir las equaciones por métodos mas sencillos, fundados todos ellos en los mismos principios que dexamos sentados. Estos métodos mas sencillos se sacan de algunas consideraciones particulares y propias á cada cuestion, las quales no se pueden determinar sino al paso que las mismas cuestiones abren camino para ello.

282 Enseñemos ahora como se construyen las equaciones determinadas de segundo grado, las quales pueden todas cifrarse en esta equacion general $xx \pm ax \pm bc = 0$, ó en estotra $xx \pm ax \pm dd = 0$, con transformar el rectángulo bc en un quadrado dd. La equacion general dá las quatro fórmulas siguientes.

I. $xx + ax - dd = 0$, ó $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{aa}{4} + dd\right)}$

II. $xx - ax - dd = 0$, ó $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{aa}{4} + dd\right)}$

III. $xx + ax + dd = 0$, ó $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{aa}{4} - dd\right)}$

IV. $xx - ax + dd = 0$, ó $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{aa}{4} - dd\right)}$

Construirémos estas fórmulas en el supuesto que

Fig. las cantidades positivas van de la izquierda á la derecha, y las negativas van por lo mismo de la derecha á la izquierda.

Para construir las dos primeras trazarémos un
7. triángulo ABC rectángulo en B, haciendo $BA = \frac{a}{2}$, $BC = d$, y con esto será $AC = \sqrt{(\frac{aa}{4} + dd)}$. Al uno y otro lado del punto A tomarémos las lineas AO, AM, MK, iguales cada una de ellas con AB, y la MN igual con AC, lo que dará

Para la primer fórmula $\begin{cases} OC = \sqrt{(\frac{aa}{4} + dd)} - \frac{a}{2} \\ AN = -[\sqrt{(\frac{aa}{4} + dd)} + \frac{a}{2} \end{cases}$

Para la seg. fórmula $\begin{cases} MC = \sqrt{(\frac{aa}{4} + dd)} + \frac{a}{2} \\ KN = -[\sqrt{(\frac{aa}{4} + dd)} - \frac{a}{2}] \end{cases}$

Para construir las dos últimas fórmulas, en las quales suponemos $\frac{aa}{4} > dd$, con el fin de que sean reales, harémos un triángulo rectángulo ABC, cuya hypotenusa $AC = \frac{a}{2}$, y el lado BC
8. $= d$, y por consiguiente será el lado $AB = \sqrt{(\frac{aa}{4} - dd)}$. Tomarémos las tres lineas AO, AM, MK, iguales cada una de ellas con AB, y la linea MN igual con la AC, y tendrémos

Para la tercer fórmula $\begin{cases} KN = -[\frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{aa}{4} - dd)}] \\ AN = -[\frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{aa}{4} - dd)}] \end{cases}$

Para la quarta fórmula $\begin{cases} MC = \frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{aa}{4} - dd)} \\ OC = \frac{a}{2} - \sqrt{(\frac{aa}{4} - dd)} \end{cases}$

Re-

Fig.

Resolucion de algunas cuestiones de Geometría de primero y segundo grado.

283 Cuestion I. *Prolongar una recta dada* AB *dividida como se quiera en el punto* C, *de modo que el rectángulo de* AE *por* EB *sea igual al quadrado de* CE.

Harémos $AB = a$, $CB = b$, $BE = x$ la cantidad incógnita de cuya determinacion pende la resolucion de la cuestion. Ya que por los términos en que esta se propone, $AE \times EB = (CE)^2$, será $(a+x)x = (b+x)^2$, esto es $ax+xx = bb+2bx+xx$, ó $ax-2bx = bb$, que dá $x = \frac{bb}{a-2b}$; luego $a-2b : b :: b : x$, cuya proporcion manifiesta que la incógnita BE es tercera proporcional á $a-2b$ y b. De aquí se saca la siguiente 9.

Construccion. Hágase la $CD = b$, con lo que será $AD = a-2b$. En los puntos C,B levántense las dos parálelas CL, BH, que la primera sea $= AD$, la segunda $= CB$, y tírese la LB. Tírese la HE paralela á la LB, cuya paralela HE encuentra la AB en el punto E, y determina la linea BE que se pide.

Porque los triángulos semejantes LCB, HBE dan $CL : CB :: BH : BE$, ó $a-2b : b :: b : BE = \frac{bb}{a-2b}$.

Esta cuestion dá motivo á algunas consideraciones importantes. Si $b < \frac{a}{2}$, el punto D siempre estará entre A y C, y se verifica la construccion enseñada. Pero si $b = \frac{a}{2}$, el punto D caerá en A, y será $AD = 0$; luego tambien $CL = 0$, el punto L caerá en C, y la LB estará sobre la CB; por consiguiente la HE paralela á la LB no encontrará la linea AB sino á una distancia infinita. Finalmente si $b > \frac{a}{2}$, el punto D caerá mas allá

Fig. de A, y será AD negativa; por lo que, deberá tirarse la CL á un lado opuesto al primero, de lo qual se seguirá que la HE paralela á la LB encontrará la AB á un lado opuesto al primero.

284 Cuestion 2. *En un triángulo dado* EHI *trazar un quadrado* ABCD.
10.

Por *triángulo dado* se entiende un triángulo del qual se conocen los ángulos, los lados, la altura, &c.

Si se considera con algun cuidado la cuestion se echa de ver que su asunto es hallar en la altura EF un punto G, tal que si por él se tira la AB paralela á HI, sea la linea $AB = GF$. Mirada á esta luz la cuestion es muy fácil de resolver; todo está en determinar la expresion algebráica de AB y la de GF, é igualarlas despues una con otra.

Llamemos, pues, a la altura conocida EF; b, la base conocida HI; y x, la linea incógnita GF; en virtud de estos supuestos será $EG = a - x$. Luego por ser AB paralela á HI, tendrémos $EF : EG :: FI : GB :: HI : AB$, pues son semejantes los triángulos EHI, EAB, esto es $EF : EG :: HI : AB$, ó $a : a - x :: b : AB$; luego $AB = \frac{ab - bx}{a}$; y como ha de ser $AB = GF$, tendrémos $\frac{ab - bx}{a} = x$, que dá $x = \frac{ab}{a + b}$; lo que suministra la siguiente

Construccion. Hemos de trazar una quarta proporcional á $a+b$, b y a. Con esta mira llevarémos desde F á O una linea $FO = a+b$; esto es $= EF + HI$, y tirarémos la EO; tomarémos despues la $FM = HI = b$, y tirarémos á la EO la paralela MG, la qual encontrará la EF en G, y determinará GF valor de x. La prueba es que los triángulos semejantes EFO, GFM dan $FO : FM :: FE : FG$, ó $a + b : b :: a : FG = \frac{ab}{a + b}$.

Si

Si el ángulo EIH fuese agudo, será la resolu- Fig.
cion qual la hemos dado; si fuese recto, el lado BC del quadrado se confundirá con BI; finalmente, si fuese obtuso, el quadrado $ABCD$ no estará inscrip- 11.
to en el triángulo, porque parte de aquel estará fuera de este. Lo propio digo del ángulo EHI.

285 Cuestion 3. *Dados dos círculos cuyos centros sean respectivamente los puntos* A, B, *tirar una linea* 12.
tangente de ambos.

Sea CD esta tangente, la qual concurra, prolongándola, con la AB en el punto E; tírensé las AC, BD á los puntos de contacto; y llamemos $AB = a$, $AC = R$, $BD = r$, $BE = x$. Por ser rectos los ángulos en C y D, los radios AC, BD serán paralelos; luego serán semejantes los triángulos EAC, EBD, y será $R : r :: a+x : x$; luego $R-r : r :: a : x$, de cuya analogía se infiere la siguiente

Construccion. Tírense como se quiera dos radios paralelos AL, BM, y la linea LM, la qual, prolongándola, cortará la AB en el punto E; si desde este punto tiramos una tangente á qualquiera de los dos círculos, esta tangente lo será de ambos, y resolverá la cuestion. Porque los triángulos semejantes dan $LA : MB :: AE : BE$; luego $LA-MB : MB :: AB : EB$, ó $R-r : r :: a : BE$.

Bien se dexa conocer que desde el mismo punto E tambien se puede tirar otra tangente Ed la qual tocará el otro círculo en el punto c. Tambien es patente que nuestra resolucion solo se verifica en circulos de diámetro desigual, en cuyo caso la tangente concurre con la linea de los centros del lado y mas allá del círculo menor. Si los círculos tuviesen un mismo diámetro, la tangente sería paralela á la recta AB, y el punto E estaría á una distancia infinita (*Geom.*). Pero entonces sería sencillísima la reso-

 lu-

Fig. lucion del problema; porque con levantar un radio perpendicular á la AB, y tirar por el punto donde corte la circunferencia la tangente, esta será tangente de ambos círculos.

Aunque del punto E no se pueden tirar mas que dos tangentes, admite no obstante la cuestion mas de dos resoluciones. Porque tambien se pueden tirar
12. dos tangentes desde un punto qualquiera F entre A y B, para lo qual harémos $BF = x$, y tendrémos $R : r :: a - x : x$, y componendo $R + r : r :: a : x$.

Prolongando, pues, el radio MB hasta N, y tirando la LN, el punto F donde esta corta la AB dará otras dos resoluciones; quiero decir, que la tangente tirada desde dicho punto al uno de los dos círculos será tangente de ambos. Estas tangentes serán KH y Mb; pero las que dá el punto F serán imaginarias, si los dos círculos se cortan; y lo serán todas quatro, si el un círculo está dentro del otro.

286. Cuestion 4. *Dada la longitud de la linea* BC, *y dados los ángulos* B, C *que con ella forman*
13. *las dos lineas* BA, CA, *determinar la altura* AD *á que se encuentran las dos últimas.*

Sirven los ángulos en los cálculos algebráicos por medio de las lineas trigonométricas. Así, quando decimos que un ángulo C v. gr. es dado, queremos decir que es dado ó conocido el valor de su seno ó de su tangente, &c. Sentado esto, llamemos BC, a; AD, y; el radio r; y m la tangente del ángulo ACD. El triángulo rectángulo ADC nos dará (*Trigon.*) $CD : DA :: r : \text{tang } ACD$, ó $CD : y :: r : m$; luego $CD = \frac{ry}{m}$. Por el mismo camino hallarémos, si llamamos $= n$ la tangente de ABD, $BD : y :: r : n$; luego $BD = \frac{ry}{n}$; pero $BD + DC = BC = a$; luego $\frac{ry}{m} + \frac{ry}{n} = a$; de donde sale $y = \frac{amn}{rn + rm}$.

 Po-

Podemos simplificar esta expresion con introducir en lugar de las tangentes m y n de los dos ángulos C y B, sus cotangentes, que llamarémos respectivamente p, q; para cuyo fin, de lo dicho (*Trig.*) sacarémos tang : R :: R : cotang. cuya proporcion nos dá $m : r :: r : p$ y $n : r :: r : q$. De aquí se saca $m = \frac{r^2}{p}$, $n = \frac{r^2}{q}$; substituyendo en lugar de m y n, estos valores en el de y, tendrémos $y = \frac{\frac{ar^4}{pq}}{\frac{r^3}{q} + \frac{r^3}{p}}$ Fig.

$$= \frac{\frac{ar^4}{pq}}{\frac{pr^3 + qr^3}{pq}} = \frac{ar^4}{pq} \times \frac{pq}{pr^3 + qr^3} = \frac{ar}{p+q}.$$

Esto manifiesta que quando no le sale al calculador un resultado tan sencillo como desea echando mano de alguna de las cantidades que puede considerar como dadas, puede escusar empezar otra vez el cálculo para indagar, si echando mano de otros datos, podria alcanzar un resultado menos complicado. Le bastará hallar equaciones que expresen las razones de aquellos datos á que apeló primero con los que quiera introducir en su lugar. En la última cuestion hemos echado mano de las equaciones $m = \frac{r^2}{p}$, $n = \frac{r^2}{q}$, para expresar m y n; y sin mas empeño que practicar algunas substituciones, hemos sacado un resultado que pende de p y q.

287. Cuestion 5. *Dados los tres lados de un triángulo* ABC, *hallar los segmentos* AD, DC *que forma la perpendicular* BD, *y hallar tambien la perpendicular* BD. 14.

Esta cuestion nos proporciona enseñar á un tiempo el modo de trasladar á equacion las cuestiones de Geometría, y como con el auxîlio de diferentes preparaciones pueden inventarse proposiciones nuevas.

Si

Fig. Si conociéramos cada una de estas lineas, las comprobaríamos del modo siguiente. Sumaríamos el quadrado de BD con el quadrado de CD, para ver si saldria una suma igual con el quadrado de BC, conforme corresponde, por ser rectángulo el triángulo BDC (*Geom.*). Sumaríamos tambien el quadra-
14. do de AD con el quadrado de BD, para ver si saldria una suma igual con el quadrado de AB.

Vamos, pues, á hacer esta comprobacion del mismo modo que si conociésemos las dos lineas. Llamemos $BD = y$, $CD = x$, $BC = a$, $AB = b$, $AC = c$. En virtud de cuyos supuestos $AD = AC - CD = c - x$, y será $xx + yy = aa$, $cc - 2cx + xx + yy = bb$.

Como xx é yy no tienen en cada equacion mas coeficiente que la unidad, resto la segunda equacion de la primera, y saco sobre la marcha $2cx - cc = aa - bb$, ó $x = \frac{aa - bb + cc}{2c} = \frac{aa - bb}{2c} + \frac{1}{2}c$, que podemos escribir así $\frac{1}{2}\frac{(a+b)(a-b)}{c} + \frac{1}{2}c$.

Esta expresion de x dá á entender, conforme diximos antes, que su valor se hallará buscando una quarta proporcional á c, $a+b$ y $a-b$, y despues de hallada, se sumará su mitad con $\frac{1}{2}c$, quiero decir, con la mitad del lado AC; cuya operacion concuerda puntualmente con lo dicho (*Trigon.*).

Pero de estas equaciones pueden inferirse otras muchas consecuencias, y nos detendrémos especificando algunas, á fin de que se acostumbren los principiantes á leer en una equacion todo lo que en ella va cifrado.

288. I. La equacion $2cx - cc = aa - bb$ es lo mismo que $c \times (2x - c) = (a + b)(a - b)$. Como el producto de los dos primeros factores es igual al producto de los dos últimos, podemos considerar los dos primeros como los extremos, y los dos últimos como los medios de una proporcion, y tendrémos $c : a+b$

$:: a-b : 2x-c$; pero $2x-c$ es $x+(c-x)$; luego si en lugar de estas letras substituimos las lineas que representan, sacarémos $AC : BC+AB :: BC-AB : CD-AD$; cuya proporcion es la misma que sacamos en otro lugar (*Trigon.*) Fig.

289 II. Si desde el centro C, y con el radio BC, trazamos el arco BO, y tiramos la cuerda BIO, tendrémos $(BD)^2+(DO)^2=(BO)^2$; pero $DO=CC-CD=BC-CD=a-x$; luego $(BO)^2=yy+aa-2ax+xx$; antes de ahora ya hemos hallado $yy+xx=aa$; luego $(BO)^2=2aa-2ax=2a(a-x)$. Luego finalmente si en lugar de x substituimos su valor $\frac{aa-bb+cc}{2c}$, sacarémos $(BO)^2=2a\left(a+\frac{bb-aa-cc}{2c}\right)=2a\left(\frac{2ac-aa-cc+bb}{2c}\right)=\frac{a}{c}\left(bb-(c-a)^2\right)$, porque $2ac-aa-cc=-(aa-2ac+cc)=-(c-a)^2$; pero si consideramos $c-a$ como una sola cantidad, esta $bb-(c-a)^2$ es lo mismo que $(b+c-a)(b-c+a)$; luego $(BO)^2=\frac{a}{c}(b+c-a)(b-c+a)$, cuya expresion podemos poner en estotra forma $(BO)^2=\frac{a}{c}(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)$; luego si llamamos $2s$ la suma de los tres lados, tendrémos $(BO)^2=\frac{a}{c}(2s-2a)(2s-2c)=4\frac{a}{c}(s-a)(s-c)$. Si desde el punto C se baxa á la OB la perpendicular CI, tendrémos (*Trigon.*) por el triángulo rectángulo CIO esta proporcion $CO : OI :: R :$ sen OCI, esto es, $a : \frac{1}{2}BO :: R :$ sen OCI; luego $\frac{1}{2}BO=\frac{a \text{ sen } OCI}{R}$, ó $BO=\frac{2a \text{ sen } OCI}{R}$, y por consiguieute $(BO)^2=\frac{4a^2 \text{ sen}^2 OCI}{R^2}$; si igualamos uno con otro los dos valores de $(BO)^2$, sacarémos $\frac{4a^2 \text{ sen}^2 OCI}{R^2}=\frac{4a}{c}(s-a)(s-c)$, ó, partiendo por $4a$, y eliminando los denominadores ac . sen^2 $OCI=R^2(s-a)(s-c)$ 14.

lo

Fig. lo que da esta proporcion $ac : (s-a)(s-c) :: R^2 : \text{sen}^2 OCI$. De esta resolucion se podria sacar para resolver una cuestion de Trigonometría resuelta tiempos ha un método diferente del que allí usamos.

290 III. La equacion $yy+xx=aa$ da $yy=aa-xx = (a+x)(a-x)$; luego si substituimos en lugar de x su valor, tendrémos $yy = \left(a+\frac{aa-bb+cc}{2c}\right) \times \left(a+\frac{bb-aa-cc}{2c}\right) = \left(\frac{2ac+aa+cc-bb}{2c}\right) \times \left(\frac{2ac-aa-bb+cc}{2c}\right) = \left(\frac{(a+c)^2-bb}{2c}\right) \times \left(\frac{bb-(c-a)^2}{2c}\right) = \left(\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2c}\right) \times \left(\frac{(b+c-a)(b-c+a)}{2c}\right)$; luego $4ccyy = (a+c+b)(a+c-b)(b+c-a)(b-c+a)$, ó $4ccyy = (a+b+c)(a+b+c-2b)(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)$. Luego si llamamos $2s$ la suma $a+b+c$ de los tres lados, tendrémos $4ccyy = 2s(2s-2b)(2s-2a)(2s-2c)$, ó $4ccyy = 16s.(s-a)(s-b)(s-c)$; dividiendo por 16, reduciendo y sacando la raiz quadrada, sale $\frac{cy}{2} = \sqrt{[s.(s-a)(s-b)(s-c)]}$. Pero $\frac{cy}{2}$ ó $\frac{AC \times BD}{2}$ es la superficie del triángulo ABC; luego *para sacar la superficie de un triángulo por sus tres lados, se ha de restar succesivamente de la mitad de la suma de los tres lados cada uno de ellos, se multiplicarán una por otra las tres restas, y por la semisuma, y se sacará finalmente la raiz quadrada del producto.*

291 IV. La equacion $2cx-cc=aa-bb$ da $bb=aa+cc-2cx$; pero si la perpendicular cayera fuera del triángulo, y representáramos las lineas con las mismas letras que hasta aquí, tendríamos $yy+xx$
15. $=aa$, é $yy+cc+2cx+xx=bb$, porque AD que era

$c-x$ es ahora $c+x$. Luego si restamos la primera Fig.
equacion de la segunda, tendrémos $cc+2cx=bb-aa$, ó $c(c+2x)=(b+a)(b-a)$, de donde sacarémos $c:b+a::b-a:c+2x$. Pero como $c+2x$ es $x+c+x$, será por lo mismo $CD+AD$; luego $AC:AB+BC::AB-BC:CD+AD$, segunda parte de la proposicion demostrada en otro lugar (*Trigon.*)

292 V. La misma equacion $cc+2cx=bb-aa$ da $bb=aa+cc+2cx$; si comparamos esta equacion con estotra $bb=aa+cc-2cx$, que corresponde á la fi- 14.
gura 14, echarémos de ver que el quadrado bb del lado AB opuesto al ángulo agudo C vale menos que la suma $aa+cc$ de los quadrados de los otros dos lados, pues vale dicha suma ménos $2cx$.

Al contrario, el quadrado bb del lado AB 15.
opuesto al ángulo obtuso vale $aa+cc+2cx$; esto es, mas de la suma de los quadrados de los otros dos lados. Podrán servir estas dos observaciones para averiguar quando ocurra calcular los ángulos de un triángulo por medio de sus lados, si el ángulo que se busca ha de ser agudo ú obtuso.

293 VI. Las dos equaciones $bb=aa+cc-2cx$, y $bb=aa+cc+2cx$ confirman lo que llevamos dicho acerca de las cantidades negativas. Se viene á la vis- 14.
ta que segun caiga la perpendicular BD dentro ú 15.
fuera del triángulo, el segmento CD coge de la derecha á la izquierda, ó de la izquierda á la derecha, y que respecto de los dos casos tiene el término $2cx$ signos contrarios. Luego recíprocamente, qualesquiera cálculos que se executen con el uno de dichos triángulos, se sabrá los que se habrán de executar para los casos análogos con el segundo triángulo; bastará dar signos contrarios á las partes que en una misma linea estuvieren en distintos lados. Pero en lo que diximos antes, así respecto del cálculo del uno de los ángulos, como respecto del cál-

Fig. cálculo correspondiente á la superficie, no se halla el segmento CD; luego ambas proposiciones se aplican indistintamente á qualesquiera triángulos rectilineos.

294 Cuestion 6. *Construir un triángulo equilátero* ABC *igual con el quadrado de la recta dada* CN.

Levántese á la base BC la perpendicular AD, y
16. llámese DC, x; por consiguiente cada lado del triángulo por construir será $= 2x$; luego $AD = \sqrt{(4xx - xx)} = x\sqrt{3}$; luego la area del triángulo ABC será $= x^2\sqrt{3}$, la qual, si llamamos CN, a, será $x^2\sqrt{3} = aa$, y $x = \sqrt{\frac{aa}{\sqrt{3}}}$.

Para facilitar la construccion de esta equacion, considérese que $x^2\sqrt{3} = aa$, multiplicada por a es $x^2 a\sqrt{3} = a^3$, ó $x^2\sqrt{3aa} = a^3$, lo que en lugar de $x\sqrt{\frac{aa}{\sqrt{3}}}$ da $x = \sqrt{\frac{a^3}{\sqrt{3aa}}}$. Hecho esto, prolónguese la CN ácia G, hasta que la CG sea quádrupla de la CN; trácese el semicírculo GMC, y levántese la perpendicular NM, la qual, por la naturaleza del círculo, será $= \sqrt{3aa}$. Córtese la $QN = \sqrt{3aa}$, y despues de trazado otro semicírculo QFC, tírese la cuerda CF. Si concluido esto se levanta la perpendicular $DE = CN$, será $DC = x$. Porque $QN = \sqrt{3aa} : NC :: (FN)^2 : (NC)^2$; ó :: $(ED)^2 : (DC)^2$, esto es $QN : NC :: (ED)^2 : (DC)^2$, y substituyendo en lugar de las lineas sus valores, $\sqrt{3aa} : a :: aa : (DC)^2$; luego $(DC)^2 = \frac{a^3}{\sqrt{3aa}}$, y $DC = \sqrt{\frac{a^3}{\sqrt{3aa}}}$. Se tomará, pues, la $DB = DC$, y toda la recta BC será tal que el triángulo equilátero en ella trazado será igual al quadrado de la recta CN.

Si hubiera sido $x = \sqrt{\frac{a^3}{\sqrt{naa}}}$, con tomar la recta $CG = (n+1) \cdot a$, la construccion se hubiera hecho del mismo modo.

295 Cuestion 7. *Trazar en un círculo dado cuyo*

yo centro es C otros dos círculos que le toquen, y se toquen uno á otro, con la condicion que del concurso de las lineas tiradas desde el centro de todos resulte el triángulo CFE semejante al triángulo dadó ABD. Fig. 17.

Prolónguense los lados CE, CF hasta llegar á los puntos de contacto G, H. Llámese $= r$ el radio CG, $EI = EG = x$, $FH = FI = y$, $BD = a$, $BA = b$, $DA = c$. Los triángulos semejantes CEF, ABD darán $a : b :: x+y : r-x$, $a : c :: x+y : r-y$ de donde nacen las dos equaciones siguientes $x+y = \frac{a}{b} \times (r-x)$, $x+y = \frac{a}{c}(r-y)$; luego $\frac{a}{b}(r-x) = \frac{a}{c}(r-y)$, partiendo ambos miembros por a, sale $\frac{r-x}{b} = \frac{r-y}{c}$, y eliminando los denominadores, se formará la siguiente proporcion $b : c :: r-x : r-y$. Nacen de aquí componendo las dos proporciones siguientes $b : b+c :: r-x : 2r-x-y$, $b+c : c :: 2r-x-y : r-y$, y si en estas substituimos los valores de $x+y$ hallados antes, saldrá $b : b+c :: r-x : 2r-\frac{a}{b}(r-x)$, $b+c : c :: 2r-\frac{a}{c}(r-y) : r-y$; y multiplicando extremos y medios, saldrán estas dos equaciones $2rb-a(r-x) = (b+c)(r-x)$, $2rc-a(r-y) = (b+c)(r-y)$, ó $\frac{2rb}{b+c+a} = r-x$, $\frac{2rc}{b+c+a} = r-y$, de donde por último se sacará $x = \frac{a+c-b}{a+b+c} \times r$, $y = \frac{a+b-c}{a+b+c} \times r$, y finalmente $a+b+c : a+c-b :: r : x$, $a+b+c : a+b-c :: r : y$.

Para construir esta equacion, tómense la $BM = Bm = BA$, y la $DN = Dn = DA$, con lo que será $MN = a+b+c$, $Mn = a+b-c$, $Nm = a+c-b$. Tírese como se quiera un radio CG, y hágase $MN : Nm :: CG : EG$, esta última linea será el radio del uno

Fig. uno de los círculos pedidos. Tírese despues la CH que forma el ángulo $GCH = BAD$, y hágase $MN : Mn :: CH : HF$, esta será el radio del otro círculo.

Por consiguiente los círculos trazados desde los centros E,F con los radios EG, FH se tocarán, tocarán al círculo dado GH, y formarán el triángulo ECF semejante al triángulo BAD.

Por el mismo camino se hallarian dos círculos externos con las mismas condiciones; no habria mas diferencia que poner en las proporciones $r-x$, $r-y$ en lugar de $r+x$, $r+y$.

296 Cuestion 8. *Dada la posicion y el tamaño*
18. *de un círculo* CDE, *y dos puntos* A,B *fuera de su circunferencia; tirar desde estos dos puntos las dos rectas* AC, BC *á un mismo punto* C *de la circunferencia cóncava del círculo, con la circunstancia que la* AB, *la qual va desde el un punto dado al otro, sea paralela á la recta* DE, *tirada desde el uno al otro de los dos puntos* D,E, *donde las rectas* AC, BC *cortan la circunferencia convexa del círculo.*

Sea $AB = a$; $AC = z$, $BC = x$, $AD = y$, $BE = u$, $DE = s$; con esto será $DC = AC - AD = z - y$, $EC = BC - BE = x - u$.

Ya que por la cuestion, AB y DE son paralelas, los triángulos ACB, DCE son semejantes (*Geom.*), y dan $CD : AD :: CE : BE$, esto es, $z - y : y :: x - u : u$; luego $uz - yu = xy - uy$, $uz = xy$ y $z = \frac{xy}{u}$. La primer proporcion da componendo

$$CA : AD :: CB : BE \text{ ó } z : y :: x : u, \text{ y } uz = xy,$$

cuya equacion es la misma que acabamos de sacar.

Por ser paralelas las lineas AB, DE tenemos las tres proporciones siguientes.

1.ª $CA : CB :: CD : CE$, ó $z : x :: z - y : x - u$ que da $zx - uz = xz - xy$, y $uz = xy$.

2.ª $CA : AB :: CD : DE$, ó $z : a :: z - y : s$, que da

dá $zs = az - ay$, $ay = az - zs$, é $y = \frac{az - zs}{a}$. Fig.
3.ª $CB : AB :: CE : DE$, ó $x : a :: x - u : s$, que 18.
dá $sx = ax - au$, $ax - sx = au$, y $x = \frac{au}{a - s}$.

De estas primeras equaciones hemos sacado los valores de tres incógnitas no mas, que son $z = \frac{xy}{u}$, $y = \frac{az - sz}{a}$, y $x = \frac{au}{a - s}$. Si substituimos el valor de x en el de z, sacarémos $z = \frac{ay}{a - s}$, y con substituir en esta el valor de y, saldrá $z = \frac{aaz - asz}{aa - as}$, lo que dá $aaz - asz = aaz - asz$, y está manifestando la inutilidad de la última substitucion. Tambien podemos introducir el valor de y en la equacion $z = \frac{xy}{u}$, y saldrá $z = \frac{axz - xsz}{au}$, ó $auz = axz - sxz$, $au = ax - sx$, y $x = \frac{au}{a - s}$, equacion hallada ya antes.

Todas las equaciones hasta aquí sacadas tienen dos incógnitas, lo que dá visos de indeterminada á la cuestion. Pero si echamos mano de la equacion $x = \frac{au}{a - s}$, en la qual u y s son arbitrarias, y tomamos dos veces $BE = u$, de un mismo tamaño determinado, y $ED = s$ de dos tamaños diferentes determinados; echarémos de ver que las lineas AD, BE no rematarán ambas veces en el mismo punto C, lo que debería verificarse si el problema fuese con efecto indeterminado.

Es, pues, preciso hacer algo mas. Lo que ocurre naturalmente es tirar desde los puntos A, B las 18.
tangentes AF, BG, que serán conocidas. Hagamos $AF = b$, $BG = c$; será $AC \times AD = (AF)^2$ (*Geom.*) $yz = bb$, y $BC \times BE = (BG)^2$ $ux = cc$. La equacion $yz = bb$ dá $y = \frac{bb}{z}$; si comparamos ahora los dos

Fig. valores de y uno con otro, tendrémos $\frac{bb}{z} = \frac{az - sz}{a}$, de donde sacarémos $abb = azz - szz$, y $zz = \frac{abb}{a - s}$, donde queda una linea s arbitraria; esto no resuelve la cuestion, por ser falso que sea el que fuere el valor de $DE = s$, sea $AC = z = \sqrt{\frac{abb}{a - s}}$, de modo que AD, BE concurran en un solo punto C.

No sirve, pues, el medio de que nos hemos valido para resolver la cuestion. Apelemos á otro.

Tiremos las lineas AC, BC, AB, DE; tire-
18. mos desde el punto A la tangente AF; y por D la tangente DH, que corta la AB en H. Llamemos $AB = a$, $AF = b$, $AC = z$, $AD = y$, $BH = r$; y será $AH = AB - BH = a - r$.

Ahora bien; los triángulos ACB, AHD son equiángulos, por ser comun á ambos el ángulo A; por ser DH tangente y ED secante, el ángulo HDE es igual al ángulo C. Pero por ser paralelas DE, AB, los ángulos HDE, DHA son iguales (*Geom.*); luego el ángulo C es igual al ángulo DHA. Los triángulos equiángulos dan $AC : AB :: AH : AD$, ó $z : a :: a - r : y$, $yz = aa - ar$, é $y = \frac{aa - ar}{z}$. Por otra parte hallamos antes $y = \frac{bb}{z}$; luego si comparamos uno con otro los dos valores de y, tendrémos $\frac{bb}{z} = \frac{aa - ar}{z}$, $bb = aa - ar$, $ar = aa - bb$, y $r = \frac{aa - bb}{a}$. Si substituimos este valor de r en $AH = a - r$, sacarémos $a - \frac{aa + bb}{a} = \frac{aa - aa + bb}{a} = \frac{bb}{a} = AH$. De aquí se sigue la siguiente

Construccion. Por ser dado el círculo ECD, y los dos puntos A, B, tiro la AB, desde el punto A tiro la tangente AF del círculo al punto F, hago AH tercera proporcional á las AB, AF, desde el pun-

punto H tiro otra tangente HD al círculo en D, y por Fig.
los puntos A, D la AC; tiro por último BC y DE, es la DE paralela á la AB.

Porque hemos hecho $AB : AF :: AF : AH$, ó $a : b :: b : AH = \frac{bb}{a}$; luego $(AF)^2 = AB \times AH$, Pero $(AF)^2 = AC \times AD$; luego $AB \times AH = AC \times AD$, y $AB : AC :: AD : AH$; luego los triángulos ACB, ADH son equiángulos, y el ángulo C igual al ángulo AHD. Ahora bien; por ser DH tangente, y DE secante, el ángulo HDE es igual al ángulo C (*Geom.*); luego los ángulos alternos AHD, HDE son iguales, y paralelas las lineas DE, AB.

La equacion $r = \frac{aa-bb}{a}$ está diciendo que la linea $AB = a$, es mayor que la $AF = b$. Si la linea AB fuese igual con la AF, sería $r = \frac{aa-bb}{a} = \frac{aa-aa}{a} = 0$, la linea BH sería nula, y el punto H coincidiria con el punto B; lo mismo se infiere de ser $AH = \frac{bb}{a}$ igual entonces á $\frac{aa}{a} = a$. Luego sería menester tirar desde el punto B la tangente BD, y la recta ADC por los puntos A, D, y tirar la BC. 19.
En virtud de todo esto las lineas DE, AB serán paralelas.

Pero si $AF = b$ fuese mayor que $AB = a$, la 18.
equacion $bb = aa - ar$ dará $-ar = bb - aa$, y $-r = \frac{bb-aa}{a}$; lo que manifiesta que $BH = r$ ha de caer al otro lado del punto B. Así como H se ha tomado entre B y A, deberá tomarse del otro lado del punto B en la misma linea AB prolongada, conforme lo dice la figura donde $BH = \frac{bb-aa}{a}$. Desde 20.
el punto H se tirará la tangente HD, por los puntos A, D la ADC, se tirará últimamente la BC, y las

 li-

Fig. lineas DE, AB serán paralelas.

297 Hemos seguido para resolver la cuestion un camino largo, y acaso fastidioso para muchos lectores. Con esto echarán de ver los principiantes que no todos los rumbos que se toman para resolver un problema proporcionan su solucion, ó proporcionan desde luego la mas expedita. A veces hace el matemático muchas tentativas infructuosas; otras veces dá varios rodeos que no arguyen en él ni mucha destreza ni mucho tino. Quando los medios de que se ha valido no han de salir á luz, poco le importa que sean los que fueren; pero si se han de publicar, tiene que buscar otros medios donde pueda lucirse su sagacidad y expedicion. Hacemos aquí esta advertencia con el fin de que no se aburran los principiantes quando tardan en resolver una cuestion, ó tardan en hallar una resolucion que por su brevedad y elegancia los dexe mas pagados que otras. En las obras impresas solo se hallan las resoluciones que entre otras muchas merecieron la preferencia á sus autores. Por este motivo tiene gran cuenta á todo hombre que desea adelantar en esta materia ver resueltas, y resolver por sí muchas cuestiones, y comparar, despues de logrado el intento, los medios de que se valió con los que halla propuestos en las obras estampadas.

298 Cuestion 9. *Dado un circulo* AEF, *y fuera de él un punto* B, *desde el qual se tire al centro la recta* CB, *y á esta la perpendicular* BD; *hallar en esta un punto* D, *tal, que si desde el centro se tira la recta* CD, *sea la parte interceptada* DE = DB.

21. Sea el radio $CA = r$, $BA = a$, $BD = DE = x$; será $CB = r+a$, $CD = r+x$. El ángulo recto en B dá $(CD)^2 = (CB)^2+(DB)^2$, ó $(r+x)^2 = (r+a)^2+xx$, ó $rr+2rx+xx = rr+2ra+aa+xx$, ó $2rx = 2ra+aa$, de donde se saca la siguiente proporcion $2r : 2r+a :: a : x$.

Su-

Suministra este cálculo una construccion de no poca elegancia. Prolónguese la AC hasta que encuentre la circunferencia en F, y será $FA = 2r$, $FB = 2r + a$. Luego si á la AB se le levanta la perpendicular $AG = AB = a$, y se tira la FG, esta, prolongada, cortará la BD en el punto pedido D. Fig.

Porque los triángulos semejantes dan $FA : FB :: AG : BD$, ó $2r : 2r+a :: a : x$; luego si se tira la CD, será DE, interceptada entre el punto D, y el círculo igual con la DB.

299 Queda resuelta la cuestion conforme viene propuesta; pero podría venir propuesta en términos mas generales. Supongamos que en los mismos supuestos se pida un punto D, al qual tirando la CD, haya de tener la BD con la DE la razon dada de $a : n$. Ahora será $DB = x$, $DE = \frac{nx}{a}$, y $CD = r + \frac{nx}{a}$; lo que dará esta equacion $\left(r + \frac{nx}{a}\right)^2 = (r+a)^2 + xx$, de la qual se sacará. . . . .

$$x = \pm \frac{\sqrt{(n^2a^4 + 2n^2a^3r - a^6 - 2a^5r + n^2a^2r^2)} - nar}{n^2 - a^2}$$

Ya se ve que de aquí se podría sacar la construccion, pero saldría muy complicada; y para que salga mas elegante hemos de seguir otro rumbo.

300 Sea la linea CED la que resuelve la cuestion; tírese el radio CO paralelo á BD, y á aquel tírese por el punto E la perpendicular FEG, y la paralela EH. Hágase $CB = FG = a$, el radio $= r$, $FB = EH = x$, $EF = y$, lo que dará $EG = HC = a - y$. Ya que $CH : HE :: CB : BD$, tambien $a - y : x :: a : BD = \frac{ax}{a-y}$; luego $DF = \frac{ax}{a-y} - x = \frac{xy}{a-y}$; y de los triángulos semejantes CEG, DEF se saca $CG : CE :: DF : DE$; luego $x : r :: \frac{xy}{a-y} : DE = \frac{ry}{a-y}$. 22.

Fig. Pero por la cuestion $BD : DE :: a : n$; luego $\frac{ax}{a-y}$: $\frac{ry}{a-y} :: a : n$, ó $ax : ry :: a : n$, $x : y :: r : n$.

Por medio de esta analogía sería facil eliminar una de las incógnitas, pues hay estotra equacion $(CE)^2 = (CH)^2 + (EH)^2$, ó $rr = (a-y)^2 + xx$; pero de aquí se originaría una equacion de segundo grado, algo mas dificultosa de construir; busquemos, pues, otra que no tenga este inconveniente. Por la analogía, $BF : FE :: r : n$; por consiguiente tírese por el punto O la OM paralela á CB, de modo que sea $BM = r$; córtese en ella la $MN = n$, y tírese la BN. Tírese por el punto que se quiera de la recta BN una perpendicular á BM, la QP v. gr. y será $BP : PQ :: r : n$; luego no podrá menos de estar el punto E en la linea BN; pero el mismo punto ha de estar precisamente en la circunferencia del círculo; será por consiguiente el punto de interseccion de la linea BN y del círculo. Luego si por E, interseccion del círculo y de la recta BN, se tira la CED, esta será la linea pedida.

301 Parémonos un rato á considerar esta construccion. Tiremos por el punto B la tangente BK, la qual, prolongada, cortará en L la MO; será BK
23. $= \sqrt{(aa-rr)}$, como es patente con tirar el radio CK. Fuera de esto, los triángulos semejantes BKC, LBM dan $KC : KB :: MB : ML$; pero $KC = MB$, luego $ML = KB = \sqrt{(aa-rr)}$. Por consiguiente, si $n = \sqrt{(aa-rr)}$, la linea BN pasa á ser BL, y toca el círculo, y no admite el problema mas que una resolucion.

Si n fuese menor que $\sqrt{(aa-rr)}$, como la $M2N$, la recta $B2N$ no encuentra el círculo, y todas las resoluciones serán imaginarias. Si n fuese mayor que $\sqrt{(aa-rr)}$, pero menor que a, como la MN, habrá dos intersecciones entre los puntos A, O, y por lo

lo mismo dos resoluciones de la cuestion. Si $n = a$, Fig.
como la *MO*, coincide este caso con el de la primer solucion, la proporcion es aquí la de igualdad, y ademas del punto que dá la primer solucion, hay otro punto *O* tal, que la *CO* que por él se tira es infinita, sin concurrir con la *BM*, por cuyo motivo las lineas, que han de ser iguales, son infinitas. Ultimamente si n es mayor que a, como *M3N*, se tirará la *B3N*, la qual cortará el circulo 1.° entre los puntos *A*, *O*, cuya interseccion dará una solucion de la cuestion semejante á la primera. 2.° En *I*, mas allá de los puntos *A*, *O*. Desde *I* se tirará por el centro *C* la recta *IC*, la qual concurrirá, prolongada, con la *BM* en *R*. En este caso se verifica igualmente que $BR : RI :: BC : M3N :: a : n$, aunque son negativas las expresiones de las rectas, pues son $\frac{ax}{a-y}$, $\frac{ry}{a-y}$, y aquí y es mayor que a.

302 El que considerare atentamente esta analysis echará de ver que es muy dilatada; porque no es
preciso que el ángulo *MBC* sea recto; basta con que 22.
las rectas *MO*, *FG*, *PQ* se hagan paralelas á la *BC*. Reparará tambien el artificio con que mediante la interseccion del círculo con una recta se ha llegado á una construccion muy sencilla, cosa facil de conseguir siempre que en la cuestion hay entre los datos algun círculo. Nuestro fin principal al seguir este camino ha sido manifestar los artificios del analysis; porque los términos de la cuestion no suelen dar á conocer desde luego el método mas sencillo.

303 Añadirémos otro modo de resolver la misma
cuestion. Tírese por el centro *C* la *COR* paralela á la 24.
BD; córtese la *CR* de modo que $CO : CR :: DE : DB$, y tírese la *BR*. Por el punto *E*, donde esta corta el círculo, tírese la *CED*, esta determinará el punto *D*.

 Por-

Fig. Porque los triángulos semejantes CER, BED dan $DE : DB :: CE = CO : CR$, cuya última razon es la que ha de haber entre DE y DB.

304 Cuestion 10. *Trazar sobre la* AB *un trián-*
25. *gulo* ACB *tal, que despues de tirada la perpendicular* CD, *las lineas* AB, AC, BC, CD *sean continuo proporcionales.*

Sea la recta $AB = a$, $AD = x$, $BD = y$, por manera que sea $a = x+y$, y finalmente $DC = z$, á fin de que sea $AC = \sqrt{(xx+zz)}$, $BC = \sqrt{(yy+zz)}$. Por la cuestion $AB : AC :: CB : CD$, ó $x+y : \sqrt{(xx+zz)} :: \sqrt{(yy+zz)} : z$; quadrando, $xx+2xy+yy : xx+zz :: yy+zz : zz$; dividiendo $2xy+yy-zz : xx+zz :: yy : zz$, alternando y dividiendo á un tiempo $2xy-zz : yy :: xx : zz$, de donde se saca la siguiente equacion $2xyzz-z^4 = x^2y^2$, ó $z^4-2xyzz+x^2y^2 = 0$, y sacando la raiz, $zz-xy = 0$, ó $zz = xy$. Luego DC es media proporcional entre AD y BD, y por consiguiente el ángulo ACB es recto.

Con mas brevedad todavía puede probarse que el ángulo ACB es recto. Porque la proporcion de antes dá $AB \times CD = AC \times BC$; pero la area del triángulo es mitad del rectángulo $AB \times CD$. Luego la misma es la mitad del rectángulo $AC \times BC$, cuya igualdad no puede verificarse á no ser recto el ángulo ACB.

305 Esto demostrado, la cuestion propuesta se reduce á estotra. *Trazar sobre la hypotenusa* AB *un triángulo rectángulo cuyos lados* AB, AC, BC *sean continuo proporcionales.*

Si llamamos las lineas con las mismas letras que antes, será $a : \sqrt{(xx+zz)} :: \sqrt{(xx+zz)} : \sqrt{(yy+zz)}$; y substituyendo xy en lugar de zz, y a en lugar de $x+y$, y partiéndolo todo por $\sqrt{a}$, tendremos $\sqrt{a} : \sqrt{x} :: \sqrt{x} : \sqrt{y}$, ó $a : x :: x : y$. Luego AD ha de ser media proporcional entre AB y BD; quiero decir que

que la *AB* se ha de partir en media y extrema razon. Fig.
De quí se infiere la siguiente

Construccion. Despues de trazar un semicírculo sobre el diámetro *AB*, pártasele en *D* en media y extrema razon; levántese en *D* la perpendicular *DC*, la qual cortará en *C* la circunferencia del círculo *ACB*; tirando últimamente las lineas *AC*, *BC*, el triángulo *ACB* será el que se pide.

En esta resolucion nos hemos valido de dos artificios. Desde luego de una condicion del problema hemos demostrado la propiedad de trazar el círculo, mediante lo qual hemos reducido la cuestion á otra mas sencilla; despues hemos reducido esta misma á otra cuya resolucion es ya conocida.

306 Cuestion II. *Trazar un círculo que pase por dos puntos dados* A, B, *y toque otro círculo dado, cuyo centro es* C.

Desde el uno de los dos puntos al otro tírese la 26.
AB, y pártasela por medio con la perpendicular *DE*; no hay duda que en esta perpendicular ha de estar el centro del círculo. Sea este centro el punto *F*, desde el qual tírese la *FB*, y la *FC*, la qual cortará en *G*, punto de contacto, la circunferencia del círculo dado; luego $= FB = FG$. Desde el centro *C* tírese á la *DE* la perpendicular *CE*, y hágase $FE = x$, $FB = FG = y$, $DB = a$, $ED = b$, $CE = c$, y el radio dado $= r$. Los triángulos rectángulos *FDB*, *FEC* dan estas dos equaciones $yy = bb - 2bx + xx + aa$, $rr + 2ry + yy = cc + xx$; si restamos la primera de la segunda, saldrá $rr + 2ry = cc - bb - aa + 2bx$, ó $2ry = 2b \times \left(\frac{cc - bb - aa - rr}{2b} + x\right)$; luego $2r : 2b$ ó $r : b :: \frac{cc - bb - aa - rr}{2b} - x : y$; si se corta la $EH = \frac{cc - bb - aa - rr}{2b}$, será $FH = \frac{cc - bb - aa - rr}{2b} + x$, cuya linea llamarémos z.

Con

Fig. 307 Con esto queda mudada la cuestion en estotra. *Dado un círculo cuyo centro es* C, *y dado el punto* H *en la* DH, *tirar la* CF, *de modo que* HF : FG :: r : b *ó* r : ED.

26. Para construir esta cuestion que por la de antes (303) se construye facilmente, tómese la *HI* tercera proporcional á las *b*, *r*, tírese la *IC*, y á esta la paralela *HG*; será *G* el punto que se busca. Porque despues de tirada la *CGF*, los triángulos semejantes *FGH*, *FCI* darán $FH : FG :: HI : CG = r$, ó $:: r : b$. Luego el círculo, cuyo centro es *F*, y el radio *FG* toca el círculo dado, y pasa por los puntos *A*, *B*. El otro punto *g* donde la *HG* corta la circunferencia, manifiesta que la cuestion admite dos soluciones. Por lo que, si se tira la *gCf*, se hallará el centro *f* del otro círculo, en el qual concurren las mismas circunstancias; pero en el primer caso el contacto de los círculos es exterior é interior en el último.

308 Cuestion 12. *Sobre las dos partes de una recta* CA *la mayor*, CB *la menor se construyen dos*
27. *triángulos equiláteros* AEC, CFB; *se tira despues la* FE *que corte en* D *la* AB *prolongada*, *y se traza últimamente desde el centro* D *y el radio* DC *el círculo* CM; *hallar en su circunferencia el punto* M *tal*, *que si por él se tiran las rectas* MA, MB, *sea* AC : BC :: MA : MB.

Busquemos primero el valor del radio *DC*. Los triángulos semejantes *DAE*, *DCF* dan $AE : CF$ ó $AC : CB :: AD : CD$; luego dividiendo $AC - CB : CB :: AC : CD$, y por letras $a-b : b :: a$: radio $CD = \frac{ab}{a-b}$; porque llamamos $CA = a$, CB, b. Hágase ahora la *MP* perpendicular á la *AB*, y $CP = x$, $PM = y$. Por la equacion del círculo es $\frac{2ab}{a-b}x - xx = yy$, y por los triángulos rectángulos es

AM

$AM = \sqrt{[(a+x)^2+yy]}$; $MB = \sqrt{[(b-x)^2+yy]}$, luego Fig.
por la cuestion $a : b :: \sqrt{[(a+x)^2+yy]} : \sqrt{[(b-x)^2+yy]}$, ó $a^2 : b^2 :: (a+x)^2+yy : (b-x)^2+y^2$, y despues de quadrar los binomios, y de substituir el valor de y^2 sacado de la equacion del círculo, sale $a^2 : b^2 :: aa + 2ax+xx : bb-2bx+xx :: aa+\frac{2a^2x}{a-b} : bb+\frac{2b^2x}{a-b}$, y alternando y dividiendo $a^2 : \frac{2a^2x}{a-b} :: b^2 : \frac{2b^2x}{a-b}$, ó $a-b : x :: a-b : x$, cuya proporcion, por ser necesaria, manifiesta que lo propuesto no es una cuestion, sino un teorema, y que en qualquiera parte que se señale el punto M, siempre será $AC : BC :: AM : BM$. Demostrarémos facilmente que esta es propiedad del círculo trazado.

309 Con este fin tiraremos las MC, MD. Ya que $AE : CF$ ó $AC : BC :: AD : CD$, y por otra parte $CE : BF$ ó $AC : BC :: CD : BD$, será $AD : CD :: CD : DB$; pero $CD = DM$, luego $AD : DM :: DM : BD$. Luego los triángulos ADM, DMB que tienen comun el ángulo D, y proporcionales sus 27.
lados, son por lo mismo semejantes, y el ángulo $AMD = MBD$. Pero $MBD = BMC + BCM$, luego tambien $AMD = BMC + BCM$. Como $BCM = CMD$, por ser isósceles el triángulo DCM, será $AMD - CMD = BMC$: esto es $AMC = BMC$, luego la recta MC parte por medio el ángulo M del triángulo AMB; y ya que los segmentos de la base han de ser proporcionales á los lados, será $AC : BC :: AM : BM$.

310 Esta propiedad del círculo suministra modos de resolver con elegancia muchas cuestiones que suelen proponerse, y darémos un exemplo. *Su-* 28.
pongamos que dadas como antes las lineas AC, CB, *y otra linea qualquiera* BH, *se haya de señalar en ella*

Fig. *élla el punto* H *tal, que si desde dicho punto se tiran las rectas* HA, HB *tenga una con otra la razon de* AC : CB, *ó que en él se forme el ángulo* AHC = BHC.

Determinarémos primero, como antes, el centro *D* del círculo, y los puntos donde la circunferencia trazada con el radio *CD* corte la *HH* re-
28. solverán la cuestion. Por el mismo método y con igual facilidad se resolverá estotro problema. *Dadas tres líneas* AC, CB, BG *sobre una misma recta, hallar un punto desde el qual todas se vean por*
29. *un mismo ángulo.* Sobre las rectas *AC*, *CB*, *BG* trácense ácia un mismo lado tres triángulos equiláteros, la línea tirada desde el punto *E* al punto *F* determina el punto *D*, y la que se tire desde el punto *L* al punto *F* determina el punto *K*. Desde los centros *D*, *K*, y con los radios *DC*, *KB* trácense dos círculos, los quales se cortarán en *H*; este será el punto pedido. Si acaso los círculos no se tocasen, la cuestion sería imposible.

311 Cuestion 13. *Construir sobre la base* BC *un triángulo isósceles, cuyo ángulo del vértice* A *sea la mitad del ángulo de la base.*

Pártase por medio el uno de los ángulos de la
30 base del triángulo *ABC*, v. gr. *C* con la línea *CD*, mediante lo qual los tres ángulos *A*, *BCD*, *ACD* serán iguales, y el triángulo *ACB* será semejante al triángulo *CDB*. Si llamamos $AC = AB = x$, $BC = a$, tendrémos $x : a :: a : BD = \frac{aa}{x}$; pero $DA = CD = BC = a$, luego $BA = \frac{a^2}{x} + a = x$, y por consiguiente $xx - ax = aa$, cuya equacion dá $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(aa + \frac{aa}{4}\right)}$. Los dos signos $\pm$ manifiestan que la equacion tiene dos raices, vamos á enseñar como se hallan ambas geométricamente.

Le-

312 Levántese en B la $BE = \frac{a}{2}$ perpendicular á la base, tírese la $CE = \sqrt{(aa + \frac{a^2}{4})}$; si á esta se añade $EF = \frac{a}{2}$, y se resta $Ef = \frac{a}{2}$ serán $CF = \frac{a}{2} + \sqrt{(aa + \frac{aa}{4})}$, $Cf = \frac{a}{2} - \sqrt{(aa + \frac{aa}{4})}$, las dos raices de la equacion, positiva la una, y la otra negativa. Fig.

No porque las dos se sacan de un mismo cálculo debe creerse que ambas resuelven la cuestion, pues no hay mas raiz útil que la positiva CF. Porque como en este supuesto el lado $CA = CF = \frac{a}{2} + \sqrt{(aa + \frac{aa}{4})}$, es mayor que $a = BC = DC = DA$, será el ángulo $ACB = ABC = BDC = A + DCA$, y el ángulo $A = DCA$; luego el ángulo ACB será duplo del ángulo A. Pero en el otro caso, como $\frac{a}{2} - \sqrt{(aa + \frac{a^2}{4})}$ es menor que a, quiero decir el lado BA menor que $BC = CD$, el punto D caerá forzosamente mas allá de A 31.
sobre el lado BA prolongado, el qual quedará determinado con aplicar $CB = DC$, y los triángulos ACD, BCD serán equiláteros; luego iguales los ángulos B, D, ACB. Pero el ángulo DCA ó DAC es igual á los dos juntos B, ACB, y el ángulo CAB es igual á los dos juntos D y DCA; luego $CAB = B+D+ACB$, ó lo que es lo mismo, el ángulo del vértice CAB del triángulo vale por tres del ángulo de la base. Luego en lugar de la cuestion propuesta hemos resuelto dos.

313 Para manifestar de donde esto nace, quiero decir, por que de las dos raices la una satisface á la primer cuestion, y la otra á la segunda muy diferente, conviene reparar el rumbo que nos ha encaminado á la equacion. Hemos hecho el ángulo BCD igual

Fig. igual con *BAC*, de donde se infiere la igualdad de las lineas *BC*, *CD*, *DA*, peculiares á ambas cuestiones. Despues hemos dicho ser $AB : BC :: BC : BD$, cuya segunda analogía tambien pertenece á la segunda cuestion. Por lo que, como *BD* en el primer caso es $x-a$, y en el otro es $x+a$, la equacion del primer problema será $xx-ax=aa$, la del segundo $xx+ax=aa$; por manera que si en esta se toma x negativa, será $xx-ax=aa$, idéntica con la primera. Por consiguiente, como todo esto se verifica en la primer cuestion, no es de estrañar que de una misma equacion se saque la resolucion de ambas cuestiones.

314 Con la mira de dar mejor á conocer á los principiantes que cosa significa la variedad de las raices, y enseñarles como por caminos diferentes pueden llegar á la resolucion de un mismo problema, añadiré aquí otro cálculo, el qual con unos mismos términos se refiere á dos triángulos equiláteros uno con otro, que en el uno el ángulo del vértice es duplo del ángulo de la base, y en el otro el ángulo del vértice es triplo del ángulo de la base.

Sea *ABC* el triángulo pedido, la base $BC=a$, el lado $BA=x$; tírense las rectas *AM*, *AN*, de
32. modo que los ángulos *MAB*, *NAC* sean cada uno
33. igual al ángulo *BAC*, y prolónguense las mismas lineas hasta que concurran con la *BC* en los puntos *D*, *E*. Es cierto que los triángulos *ABD*, *ACE* serán isósceles, luego $AB=BD=AC=CE=x$. A mas de esto, los triángulos *EAB*, *ABC* son semejantes; luego $CB : BA :: BA : BE$, y, por letras, en el primer triángulo $a : x :: x : a+x$, que dá $aa+ax=xx$, y en el otro triángulo $a : x :: x : a-x$, que dá $aa-ax=xx$, de cuyas equaciones la una se transforma en la otra con tomar x negativa.

315 Ambos triángulos parten la circunferencia en cinco partes. Porque si en cada círculo se inscribe el

el triángulo *ABC*, cuyo ángulo *A* sea la mitad de cada uno de los ángulos *B*, *C*, el arco *BC* será la quinta parte de la circunferencia, y cada uno de los arcos *AB*, *AC* dos quintas partes. Pero si se inscribe el triángulo *ADE*, cuyo ángulo *A* sea triplo de cada uno de los ángulos *D*, *E*, cada arco *AD*, *AE* será la quinta parte de la circunferencia, y el arco *DBCE* tendrá las tres quintas partes. Fig.

Consideraciones acerca de las lineas trigonométricas.

316 Supongamos que el ángulo *ACB* crece y llega á ser v. gr. *ACF*; el seno *FG*, la tangente *AI*, 35. la secante *CI* serán mayores de lo que eran respecto del ángulo *ACB*, quando por lo contrario el coseno *CG*, la contangente *LK*, y la cosecante *CK* menguan.

317 Si el ángulo crece hasta 90°, se echa de ver, con dar una mirada á la figura, que el seno y la cosecante son entónces iguales al radio, con el qual se confunden; que el coseno y la cotangente se reducen á cero; finalmente que la tangente y la secante son infinitas, porque siendo entónces paralelas una á otra, ya no se pueden encontrar.

318 Si el ángulo prosigue creciendo hasta ser obtuso como *ACM*, las lineas trigonométricas de *ACM* son indispensablemente las de su suplemento *RCM*, circunstancia demostrada ya en la Trigonometria. Verdad es que esto da motivo á casos dudosos, en los quales no es posible discernir por sola Trigonometría si un seno dado, ó una cosecante corresponde á un ángulo agudo ó á su suplemento. Pero no se tropieza con este inconveniente respecto de las demas lineas trigonométricas, distinguiendo el sig-

no

Fig. no negativo las que corresponden al ángulo obtuso.

319 Y de hecho, si admitimos que el coseno del ángulo obtuso *ACM* es el coseno *CN* de su suplemento *RCM*, es de reparar que como el coseno *CD* mengua de continuo á medida que el arco primitivo *AB* crece, pasa finalmente por cero antes de proseguir mas allá del centro en la direccion *CN*. Luego *el coseno de un arco obtuso es negativo, y lo es tambien la cotangente, la qual en nuestro supuesto es LO*. Sabemos (*Trigon.*) que cosen $= \frac{R^2}{sec}$, y cot $= \frac{R^2}{tang}$; luego quando el coseno, y la cotangente son negativas, las secantes y las tangentes son tambien negativas; pues el radio es una cantidad real, cuyo quadrado nunca puede ser negativo. Luego *la tangente y la secante del ángulo obtuso son negativas*. Pero quando el ángulo llegó á 90° (317) llegaron á ser infinitas; luego las *cantidades que, al variar, pasan por el infinito, se mudan de po-*
25. *sitivas en negativas, y al reves, lo mismo que quando pasan por cero*. Luego *la cosecante y el seno del ángulo obtuso, como no pasan ni por cero ni por el infinito, prosiguen siendo positivas*.

Así la cosecante *CO* del ángulo obtuso *ACM* es positiva; su secante *CS* y su tangente *RS* son negativas.

320 Solo con mirar la figura se percibe, en virtud de lo dicho, que si el arco crece hasta 180°, el seno y la tangente llegan á ser nulos; la cotangente y la cosecante, infinitas; el coseno y la secante, iguales al radio.

321 En las operaciones de Astronomía hacen mucho papel los arcos desde 0° hasta 180°, y por consiguiente las lineas trigonométricas del tercero y último quadrantes de círculo.

Omi-

Omitirémos lo que corresponde á la secante y Fig.
á la cosecante; pero prosiguiendo las consideraciones de antes (319), sacarémos que desde 180° hasta 270°, los senos y cosenos son negativos, la tangente y cotangente positivas. Un arco que pasa de 180°, *ALRP* v. gr. tiene por seno, *PQ*, *CQ* por coseno, *RV* por tangente, *TX* por cotangente.

322 Quando el arco es de 270° cabales, el seno es igual al radio, la tangente es infinita, el coseno y la cotangente son cero.

323 Luego en el último quadrante del círculo, quiero decir, quando el arco, v. gr. *ALRXT*, coge mas de tres quadrantes de círculo, el coseno es 35.
positivo (319), el seno, la tangente y la cotangente son negativas.

324 Finalmente, quando el arco llega á 360°, vuelve al punto donde principió, y desde el qual se empezaron á contar sus grados; el seno y la tangente son nulas, el coseno igual al radio, y la tangente infinita.

325 La tabla siguiente es un resumen de todo lo dicho, y muy socorrida para los cálculos. No incluye la cotangente, la secante, ni la cosecante, por ser sus signos respectivamente los mismos (319) que los de la tangente, del coseno, y del seno. La tabla está manifestando en que casos estas últimas lineas son cero, infinitas, ó iguales al radio, cuya expresion es la unidad. Es de reparar, que la cotangente, la secante, y la cosecante son infinitas, siempre que las lineas sus correspondientes en razon inversa (I. *Trigon.*), esto es, la tangente, el coseno y el seno, son cero.

Quando señalamos una linea igual á cero, ó al infinito, le dexamos el signo que tenia antes de llegar á este término. Sobre ser inútil detenerse á indagar que signo corresponde en este caso; las equa-

Fig. ciones trigonométricas son igualmente verdaderas, múdense, ó no se muden los signos en el punto donde el valor es infinito ó cero; con tal que en todos los casos semejantes se siga la misma regla.

Tabla de las lineas trigonométricas en los quatro quadrantes del círculo.

Arco.	*Seno.*	*Coseno.*	*Tang.*
0° ó 360°	−0	+1	−0
Desde 0° hasta 90°	+	+	+
á 90°	+1	+0	+∞
Desde 90° hasta 180°	+	−	−
á 180°	+0	−1	−0
Desde 180° hasta 270°	−	−	+
á 270°	−1	−0	+∞
Desde 270° hasta 360°	−	+	−

326 Si hacemos $R=1$, sale $\text{sen}\ 30^\circ = \frac{1}{2}$; pero $\cos^2 30^\circ = R^2 - \text{sen}^2\ 30^\circ = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; luego $\cos 30^\circ = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

327 Por ser $R^2 = \text{sen}^2\ 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 2\ \text{sen}^2\ 45^\circ = 1$, tambien será $\text{sen}\ 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

328 Cuestion I. *Dados los senos y cosenos de dos arcos; hallar los senos y cosenos de la suma, ó de la diferencia de los dos arcos.*

36. Como en todo triángulo rectilíneo la suma de dos

dos ángulos, es suplemento del tercero; quiero decir, como en el triángulo ACB v. g. $A+B=180^\circ-ACB$, síguese que sen ACB = sen $(A+B)$ (318). Sobre este fundamento resolverémos facilísimamente la cuestion. Fig.

Porque (I. *Trigon.*) AC : sen B :: AB : sen $ACB=\frac{AB\times \text{sen } B}{AC}=\text{sen }(A+B)$. Pero si se supone tirada la CD perpendicular al lado AB, será (I. *Trig.*) $BC : CD :: R : \text{sen } B=\frac{R\times CD}{BC}$. Si substituimos este valor de sen B en la equacion de antes, saldrá sen $(A+B)=\frac{R\times CD\times AB}{AC\times BC}$. Pero $AB=BD+AD$; luego sen $(A+B)=\frac{R\times CD\times BD}{AC\times BC}+\frac{R\times CD\times AD}{AC\times BC}$. Pero $\frac{CD}{AC}=\frac{\text{sen } A}{R}$ (I. *Trigon.*) $\frac{BD}{BC}=\frac{\cos B}{R}$, $\frac{CD}{BC}=\frac{\text{sen } B}{R}$ y $\frac{AD}{AC}=\frac{\cos A}{R}$, luego sen $(A+B)=\frac{\text{sen } A\times \cos B+\text{sen } B\times\cos A}{R}$.

329 Si aplicamos esta solucion á estotra figura, se tendrá presente que $AB=BD-AD$; que $ACB=180^\circ-CAB-B=CAD-B$, y que en este caso el ángulo CAD corresponde al ángulo A que está en las equaciones $\frac{CD}{AC}=\frac{\text{sen } A}{R}$ y $\frac{AD}{AC}=\frac{\cos A}{R}$. Haciendo las mudanzas fundadas en estas observaciones, la demostracion precedente dará 37.

$$\text{Sen }(A-B)=\frac{\text{sen } A\times\cos B-\text{sen } B\times\cos A}{R}.$$

330 $\cos^2(A+B)=R^2-\text{sen}^2(A+B)=$
$$\frac{R^4-\text{sen}^2 A\times\cos^2 B-2\text{ sen } A\times\cos A\times\text{sen } B\times\cos B-\text{sen}^2 B\times\cos^2 A}{R^2}.$$

Pero $\cos^2 B=R^2-\text{sen}^2 B$, y $\text{sen}^2 B=R^2-\cos^2 B$. Si substituimos estos valores, y despues atendemos á que $R^4-R^2(\text{sen}^2 A+\cos^2 A)=R^4-R^4=0$,

 sal-

saldrá esta equacion $\text{Cos}^2 (A+B) = \ldots\ldots\ldots$
$\frac{\cos^2 A \times \cos^2 B - 2 \text{ sen } A \times \cos A \times \text{sen } B \times \cos B + \text{sen}^2 A \times \text{sen}^2 B}{R^2}$,
y sacando las raices,

$$\text{Cos } (A+B) = \frac{\cos A \times \cos B - \text{sen } A \times \text{sen } B}{R},$$

331 Practicando lo mismo con la fórmula (329), saldrá

$$\text{Cos } (A-B) = \frac{\cos A \times \cos B + \text{sen} A \times \text{sen} B}{R}.$$

332 $\text{Tang } (A+B) = \frac{\text{sen } (A+B)}{\cos (A+B)} = \ldots$ $\frac{\text{sen } A \times \cos B + \text{sen } B \times \cos A}{\cos A \times \cos B - \text{sen } A \times \text{sen } B}$. Si partimos todos los términos de este último quebrado primero por cos A × cos B, y despues por sen A × sen B, tendremos

333 $\text{Tang } (A+B) = \frac{\text{tang } A + \text{tang } B}{1 - \text{tang } A \times \text{tang } B} = \frac{\cot B + \cot A}{\cot B \times \cot A - 1}.$

334 Si executamos lo mismo con los valores de $\frac{\text{sen } (A-B)}{\cos (A-B)} = \text{Tang } (A-B)$, saldrá

$$\text{Tang } (A-B) = \frac{\text{tang } A - \text{tang } B}{1 + \text{tang } A \times \text{tang } B} = \frac{\cot B - \cot A}{\cot B \times \cot A + 1}.$$

335 En todas las proporciones y equaciones hasta aquí sacadas, cada término tiene un mismo número de factores, v. gr. cada término de la equacion (330) $R^2 \times \cos^2 (A+B) = \cos^2 A \times \cos^2 B - 2$ sen A cos A sen B cos B + $\text{sen}^2 A \times \text{sen}^2 B$ es de quatro dimensiones, quiero decir que se compone del producto de quatro factores; el primer miembro v. gr. es $R \times R \times \cos (A+B) \times \cos (A+B)$, y lo mismo se verifica en los demas términos. Toda equacion cuyos términos se componen todos de un mismo número de factores algebráicos ó geométricos, sin atender á los coeficientes numéricos, se llama *equacion homogenea*, ó de *dimensiones iguales* (12). Si en todos los cálculos trigonométricos se dexara el radio

dio R, todos los términos de cada fórmula serian de igual dimension. Será, pues, facil hacer que lo sean introduciendo en cada uno el factor R elevado á la conveniente potencia para que sean homogeneos. Si llamamos v. gr. x é y dos lineas trigonométricas, y se presenta una equacion de esta forma $4x^3 = 3x - y + 2$, cuyo término x^3 es de tres dimensiones, x é y de sola una, y 2 de ninguna: para introducir como corresponde el radio en esta equacion, se ha de escribir $4x^3 = 3R^2x - R^2y + 2R^3$. Y esta hubiera sido desde el principio la equacion, si no se hubiese eliminado R para substituir la unidad en su lugar.

Fig.

PRINCIPIOS DE SECCIONES CONICAS.

INTRODUCCION.

336 Toda *linea curva regular*, esto es, toda curva que por su naturaleza puede ser trazada con arreglo á una ley constante que determine la posicion ó situacion de todos sus puntos, puede ser asunto de especulaciones geométricas. Porque toda linea regular goza alguna propiedad invariable que conviene igualmente á todos sus puntos, y no conviene sino á ellos, cuya propiedad constituye la naturaleza ó esencia de la curva. La naturaleza del círculo v. gr. consiste en la igualdad de sus radios, cuya igualdad distingue la circunferencia del círculo de otra qualquier linea curva, y determina la posicion de todos los puntos de la linea circular, fixándolos todos á una misma distancia del centro.

337 Se ha escrito mucho en estos últimos tiempos de las curvas regulares, particularmente de aquellas que se llaman *geométricas*, y en cuya equacion no hay mas que cantidades finitas. El principio fundamental de todas las investigaciones peculiares á esta materia consiste en cifrar la esencia de las curvas en una equacion algebráica. En el plano donde está trazada una linea curva MM' se toma á arbitrio un punto fixo A, llamado el *origen*, por el qual se tiran á discrecion dos rectas AB, AD. Desde cada
38. punto M de la linea MM' se tiran rectas MP, MQ respectivamente perpendiculares á las rectas AB,AD hasta encotrarlas. La una, MP v. gr. ó su igual AQ,

AQ, se llama la *ordenada* ó *aplicada*; la otra, *MQ* Fig.
v. gr. ó su igual *AP* se llama la *abscisa*. Por lo que, la recta *AB* se llama la *linea*, ó el *exe de las abscisas*; y la recta *AD* la *linea*, ó el *exe de las ordenadas*; llamándose con el nombre de *coordenadas* la abscisa y ordenada juntas correspondientes á un mismo punto; *MP* y *MQ*, ó *MP* y *PA*, ó finalmente *MQ* y *QA* son las coordenadas del punto *M*.

338 La propiedad peculiar á cada punto de una linea regular (337), que constituye su caracter y distingue los puntos que le pertenecen de los que no son suyos, consiste en cierta relacion entre las coordenadas, la qual se cifra en una equacion algebráica indeterminada, cuya equacion se llama la *equacion de la curva* de la qual expresa la naturaleza.

Supongamos que dado v. gr. el circulo *mMm′m″M′* trazado desde el centro *C* y con el radio *CM*, se me pida la equacion que expresa su naturaleza. Señalo á 39.
arbitrio el origen en el punto *A*, tomo la *AB* por linea de las abscisas, y la *AD*, perpendicular á *AB*, por linea de las ordenadas; si desde un punto *M*, tomado á arbitrio en la circunferencia, se tiran las *MP*, *MQ* paralelas á las *AD*, *AB*, serán *MP*, *MQ* las coordenadas del punto *M*. Se me pide, pues, la equacion indeterminada que exprese su relacion de un modo general; esto es, que exprese no la relacion particular de las rectas *MP*, *MQ* trazadas en la figura, sino la relacion general que hay entre la ordenada y la abscisa de un punto qualquiera de la circunferencia. Esta equacion debe sacarse de la propiedad que tiene todo punto de la circunferencia *mMm′m″M′* de estar á una misma distancia invariable *CM* del centro *C*; pende, pues, esta propiedad de la longitud dada del radio *CM*, y de la posicion dada del centro *C*. La situacion del centro *C* respecto de las rectas *AB*, *AD*, á las quales todo de-

 be

Fig. be referirse, queda determinada con tirar las rectas CF, CE paralelas á AB, AD; porque dada que sea la posicion del centro C y de las rectas AB, AD, será tambien conocida la extension de las rectas CF, CE; y recíprocamente, dadas que sean de posicion las rectas CE, CF, quedará determinada la posicion del centro C.

Expresemos con letras estas rectas dadas, y llamemos CE, a; CF, b; y el radio CM, r. Representan por lo mismo las letras a, b, r cantidades constantes, siempre unas mismas en qualquiera parte de la circunferencia que esté el punto M, por no tener su longitud dependencia alguna del punto M. Pero si expresamos la abscisa AP ó MQ con la letra x, y la ordenada MP ó AQ con la letra y, las dos letras x é y expresarán cantidades variables. Porque como se me pide una equacion que convenga igualmente á todos los puntos de la circunferen-
39. cia; quiero decir, una equacion que del mismo modo que expresa la relacion entre las coordenadas AP, PM del punto M, exprese tambien la relacion de las coordenadas AP', $P'm'$ de otro punto qualquiera m' de la circunferencia; no puede menos de expresar indistintamente la letra x la abscisa AP, y la abscisa AP', y en general otra abscisa qualquiera; tampoco puede menos de expresar la letra y la ordenada MP y la ordenada $P'm'$, y en general otra ordenada qualquiera; teniendo presente que x é y expresan en la equacion las coordenadas de un mismo punto, bien que de un punto qualquiera.

339 Para darnos mejor á entender, ciñámonos al punto M. Si su ordenada PM corta la recta CF en G, tendrémos $GM = MP - PG = MP - CE = y - a$, y $CG = CF - FG = CF - AP = b - x$. Pero por ser rectángulo el triángulo CGM, $(GM)^2 + (CG)^2 = (CM)^2$. Luego $(y-a)^2 + (b-x)^2 = rr$, ó $yy -$

$2ay+aa+bb-2bx+xx=rr$. Esta equacion no es privativa del punto M; conviene igualmente á otro punto qualquiera de la circunferencia, v. gr. al punto m'. Porque respecto del punto m' tenemos $m'G'=m'P'-P'G'$ $=m'P'-CE=y-a$, y $CG'=FG'-FC=AP'-FC=$ $x-b$. A mas de esto $Cm'=CM=r$. Luego la equacion $(m'G')^2+(CG)^2=(Cm')^2$, que dá el triángulo rectángulo $CG'm'$, expresada analíticamente será $(y-a)^2$ $+(x-b)^2=rr$, ó $yy-2ay+aa+xx-2bx+bb=rr$, la misma cabalmente que se sacó del punto M. Fig.

Representa, pues, analíticamente esta equacion la naturaleza del círculo. Es de aquellas á las quales los Analistas dán el nombre de *indeterminadas*, porque tienen dos incógnitas, ó, por mejor decir, dos *variables*, cada una de las quales admite una infinidad de valores, pero con tal dependencia una de otra en virtud del enlace que entre ellas representa la equacion, que determinada que sea la una 39.
de las dos variables, queda tambien determinada la otra. Si queremos que en la equacion $yy-2ay+aa$ $+bb-2bx+xx=rr$, represente la variable x la abscisa determinada AP, que llamarémos c, la equacion indeterminada se transformará en estotra igualdad determinada $yy-2ay+aa+bb-2bc+cc=rr$, en la qual y, que ya no es variable sino *incógnita*, expresa el valor de la ordenada determinada PM. Y si le diéramos á x el valor d, que supondremos ser el de la abscisa AP', la equacion indeterminada se transformaría en estotra determinada $yy+2ay+aa+$ $bb-2bd+dd=rr$, donde y, que ya es determinada, representa la ordenada $P'm'$.

340 Podríamos cifrar en una equacion mas sencilla la naturaleza del círculo, fixando en otro punto el origen. Señalémosle v. gr. en el centro, siendo siempre las ordenadas perpendiculares una á otra; la abscisa x será CP, y la ordenada y será MP; y 40.
del

Fig. del triángulo rectángulo CPM sacarémos para expresar la naturaleza del círculo la equacion $xx+yy = rr$.

341 Tambien podrémos cifrar la naturaleza del círculo en otra equacion mas sencilla que la primera, considerando otra propiedad suya. Sabemos (*Geom.*) que la perpendicular PM baxada desde un punto M
40. de la circunferencia al diámetro AB es media proporcional entre las dos partes ó segmentos AP, PB. Llamemos AB, a; AP, x; PM, y; será $PB = AB - AP = a - x$; y como $AP : PM :: PM : PB$, será, con substituir en lugar de las lineas las letras que las representan, $x : y :: y : a - x$, de donde saldrá $yy = ax - xx$; cuya equacion tambien expresa la naturaleza del círculo.

342 Si en vez de señalar en A el origen de las abscisas, le señalamos en C, será $AP = CA - CP = \frac{1}{2}a - x$, y PB será $\frac{1}{2}a + x$; y de $AP \times PB = (PM)^2$ sacarémos $\frac{1}{4}aa - xx = yy$, otra equacion peculiar al círculo.

343 De las quatro equaciones distintas en que hemos visto cifrada la naturaleza del círculo, se infiere que una misma curva puede figurarse en equaciones diferentes, cada una de las quales la representa, digámoslo así, de distinto modo. El acierto de las investigaciones analíticas acerca de las curvas consiste principalmente en señalar de tal modo la posicion de sus exes, que se saque, para expresar una curva, la equacion mas sencilla que se pueda, ó la mas adequada al intento del calculador.

344 Antes de pasar adelante conviene prevenir que hay curvas regulares, cuya naturaleza no se puede cifrar en una equacion analítica.

Supongamos v. gr. que sobre el diámetro AB se trace un círculo ADB, y que baxando desde cada
41. punto de la circunferencia una perpendicular DP al

al diámetro *AB*, se la prolongue hasta *M*, por manera que *MP* sea igual al arco correspondiente *AD*; la curva *AMC* que pase por todos los puntos *M* será regular, pues se traza con arreglo á una ley constante. Sin embargo no es posible cifrar su naturaleza en una equacion algebráica, porque considerando como abscisas los senos versos *AP*, no se conoce medio alguno algebráico para expresar su relacion con los arcos *AD*, ó con las ordenadas *PM* iguales con los arcos, cuyo valor no se puede sacar cabal. Fig.

345 Las curvas de esta especie se llaman *curvas trascendentes*, *mecánicas* ó *irracionales*, para distinguirlas de las curvas cuya naturaleza se puede cifrar en equaciones algebráicas, por cuyo motivo estas se llaman *curvas algebráicas*, *geométricas* ó *racionales*. Para tratar de las curvas trascendentes es indispensable otra especie de analisis conocida con los nombres de *cálculo de las diferenciales*, *cálculo diferencial*, *cálculo infinitesimal*, cuyos principios declararémos mas adelante.

346 Los que desearen enterarse mas por menor de la diferencia que va de las curvas geométricas á las mecánicas, acudan al Tomo III. de mis Elementos, aquí nos ceñirémos á especificar algo mas, aunque sea á costa de una repeticion, las señales características de las curvas geométricas. Es geométrica ó algebráica una curva 1.° quando las dos coordenadas *AP*, *PM* son dos lineas rectas finitas que 39.
concurren en un punto *P*, donde forman un ángulo dado *APM*; 2.° quando la una de las coordenadas *AP* tiene constante su orígen en un mismo punto *A*, y está en una sola linea *APP'*, y la otra ordenada *PM*, *Pm'* permanece constantemente paralela á sí misma; 3.° quando su equacion no tiene mas que dos incógnitas x é y, que representan las coordenadas, y

no

Fig. no lleva sino especies que representan cantidades finitas; 4.º su equacion ha de expresar la relacion que hay entre cada punto de la curva al qual corresponde, y cada punto de la linea recta á la qual se refiere la curva; por manera que respecto de cada punto de la curva sea siempre una misma la equacion.

347 Las curvas algebráicas se distinguen en *finitas*, *infinitas* y *mixtas*. Una curva es infinita quando tiene ramos que se extienden al infinito, tales son las curvas *A*,*B*,*C*,*D*,*E*,*F*; es finita una curva quando
42. estando ceñida en un espacio limitado vuelve sobre sí, ora no dé mas que una vuelta como el círculo,
43. ó el óvalo *G*, ora se anuda y vuelva á anudar muchas veces, como algunas de las figuras *H*,*I*,*K*,*L*,*M*. Finalmente es mixta una curva quando despues de dar algunas vueltas en un espacio finito donde se do-
44. bla, arroja ramas al infinito, como *N*,*O*,*P*,*Q*.

Todas estas inflexîones y curvaturas, y, en general, todas las singularidades de las curvas algebráicas están con tanta puntualidad cifradas en su equacion, que la curva trazada en el papel no ofrece cosa alguna á la vista que no la pueda leer en su equacion el que sepa descifrarla. Y aun muchas veces halla el analisis en una curva, al calcular su equacion, singularidades que no es posible las averigüen los sentidos por otro camino.

348 Para entender como una equacion representa el contorno de una curva, conviene considerar que la abscisa cuyo valor es cero en el orígen, va creciendo por todos los grados imaginables hasta el infinito así positivo como negativo; por consiguiente la abscisa x tiene una infinidad de valores diferentes positivos y negativos. Substituidos estos valores unos despues de otros en la equacion indeterminada de la curva, la transforman en otras tantas equaciones determinadas en las quales no hay mas in-

incógnita que y, cuyos valores son las raices de las Fig.
tales equaciones. Estos valores ó raices expresan las ordenadas correspondientes á cada abscisa. Por lo que, tiene cada abscisa en su extremo una ó muchas ordenadas, conforme tiene una ó muchas raices la igualdad en que se transforma la equacion de la curva, quando en lugar de x se substituye el valor de la abscisa. Como la linea curva pasa por todos los extremos de estas ordenadas, tiene ó arroja tantas ramas, quantos son los valores de y en la equacion. Y quando puede el Algebra hallar estos valores, por ellos se conoce si las ramas á que pertenecen son infinitas ó finitas, qual es su direccion y posicion; en suma, quanto tienen de notable.

349 La equacion del círculo dada antes (239) $yy-2ay+aa+xx-2bx+bb=rr$, ó $yy-2ay+aa=rr-bb+2bx-xx$, ó $(y-a)^2=rr-bb+2bx-xx$ tiene dos raices, ó valores diferentes, es á saber $a+\sqrt{(rr-bb+2bx-xx)}$, y $a-\sqrt{(rr-bb+2bx-xx)}$. Por lo que, cada abscisa $AP=x$ tiene dos ordenadas 39.
$y=MP$ ó PM'; tiene por lo mismo la curva dos ramas que son las dos semicircunferencias, la superior $mMm'm''$, y la inferior $mM'm''$. La primera pasa por los vértices de todas las ordenadas $PM=y$, iguales á $a+\sqrt{(rr-bb+2bx-xx)}$, y la segunda por los extremos de todas las ordenadas $PM'=y$, iguales á $a-\sqrt{(rr-bb+2bx-xx)}$.

350 Pero en estotra equacion indeterminada $xx+$
$6ax+5aa-6ay=0$, en que va cifrada la naturaleza 45.
de la curva que demuestra la figura, y no tiene mas valor que $\frac{xx}{6a}+x+\frac{5}{6}a$. Por consiguiente cada abscisa de la curva no tiene mas que una ordenada. Hablando con propiedad la curva no tiene mas que una rama; pero esta rama se considera como dos

dos ramas, porque se extiende al infinito á la parte positiva y á la parte negativa.

351 Esto es consecuencia necesaria de ser circunstancia de la equacion de toda curva, indicar, no solo el número de sus ramas, sino tambien su posicion. Porque si los valores positivos de x representan abscisas positivas, los valores negativos de x no pueden menos de representar abscisas negativas. Lo mismo digo de los valores de y; sus valores positivos representan ordenadas positivas; y sus valores negativos no pueden menos de representar ordenadas negativas. Es práctica comun, bien que arbitraria, tomar las abscisas positivas á la derecha, y las negativas á la izquierda del origen; las ordenadas positivas desde el exe de las abscisas para arriba, y las ordenadas negativas desde el mismo exe para abaxo.

De lo poco que dexamos dicho acerca del artificio con que se cifran las lineas curvas en equaciones, se pueden inferir dos consecuencias cuya generalidad se viene á los ojos.

352 1° Una linea algebráica pasa por el origen quando es tal su equacion que con suponer $x = 0$, sale $y = 0$, ó quando del supuesto $y = 0$ sale $x = 0$.

Si v. gr. en la equacion $xxy + 2axy - axx + aay = 0$, hacemos $x = 0$; toda ella se reducirá á $aay = 0$, cuya raiz es $y = 0$. Luego á la abscisa cero, esto es en el origen, corresponde la ordenada cero. Por consiguiente no tiene longitud alguna la primer ordenada, se reduce á un punto, y como la curva ha de pasar por el vértice de todas las ordenadas, pasa indispensablemente por el origen.

Pero $x = 0$ da $y = 0$, siempre que la equacion de la curva no tiene ningun término constante, ó ningun término que no tenga alguna de las indeterminadas x ó y. Porque si en una equacion de esta cir-

circunstancia hacemos $x=0$, todos los términos que Fig. tienen x se desaparecerán, y todos los términos restantes estarán multiplicados por y, pues suponemos que la tal equacion no tiene término alguno sin x ó y. Luego todos los términos que quedaren desaparecerán en el supuesto de $y=0$; componen por lo mismo una equacion que tiene una raiz $y=0$. Luego á la abscisa $x=0$ corresponde por lo menos una ordenada $y=0$. Luego finalmente toda linea, cuya equacion no tiene ningun término constante, pasa por el origen.

2.° *Para hallar en que puntos una linea algebráica corta el exe de las ordenadas*, basta suponer en su equacion $x=0$; los valores de y que se sacaren de la equacion conforme la dexare este supuesto, determinarán los puntos donde la linea cortará el exe de las ordenadas.

353 Si en el exemplo propuesto (250) hacemos $x=0$, en la equacion $y=\frac{xx}{6a}+x+\frac{5}{6}a$, sale $y=\frac{5}{6}a$. Por cuyo motivo no pasa la curva por el origen A, pues $x=0$ no da $y=0$; pero pasa 45. por el punto a de la linea de las ordenadas, distante del origen el intervalo $Aa=\frac{5}{6}a$, porque $x=0$ da $y=\frac{5}{6}a$.

Quando se quiera *averiguar en que puntos una linea algebráica corta el exe de las abscisas*, se sacarán de la equacion los valores de x en el supuesto de ser $y=0$.

Si en la equacion $y=\frac{xx}{6a}+x+\frac{5}{6}a$, ó $xx+6ax+5aa-6ay=0$, hacemos $y=0$, quedará $xx+6ax+5aa$, la qual tiene dos raices, es á saber $x=-a$ é $y=-5a$; lo que está diciendo que la curva 45. encuentra el exe de las abscisas en dos puntos E, I, esto es, en los extremos de las abscisas $AE=-a$, y $AI=-5a$.

Pen-

Fig. 354 *Pende*, pues, *la posicion de las ramas de una curva de sus abscisas y ordenadas*, conforme sean positivas ó negativas, cuyas ordenadas merecen ser atendidas, aun quando da la equacion imaginarios sus valores, y manifiesta que son imposibles. Entonces desaparece la curva, ó, por mejor decir, no representa la equacion curva alguna quando son imaginarias todas sus raices.

355 Entre las curvas algebráicas hacen el primer papel la *Parábola*, la *Elipse* y la *Hypérbola*, cuyas tres curvas se conocen con nombre de *Secciones cónicas*, porque se originan, conforme dirémos despues, en la superficie de un cono quando se le corta con un plano. Por lo mismo nos detendrémos en demostrar aquí sus principales propiedades.

De la Parábola.

356 La parábola es una curva cuyos puntos *M* están todos á igual distancia de un punto fixo *F*
46. llamado *focus*, y de una linea *SD*, fixa tambien, llamada la *directriz*.

357 La linea *SF* perpendicular á la directriz, la qual pasa por el focus, se llama el *exe* de la parábola.

358 Toda linea *DM* paralela al exe, se llama *diámetro*.

359 Toda linea *PM* que es perpendicular al exe, y remata en la parábola, se llama *ordenada*.

360 La parte *AP* del exe que coge desde la ordenada hasta el punto *A* donde el exe encuentra la parábola, se llama *abscisa*.

361 Toda linea *TM* que toca la parábola sin cortarla, se llama *tangente*; y se da el nombre de *subtangente* á la parte *PT* del exe que coge desde la orde-

denada hasta el punto donde le encuentra la tangente. Fig.

362 Toda linea, qual la *MQ*, que es perpendicular á la tangente en el punto *M*, y remata en el exe, se llama *normal*; y la parte *PQ* del exe, que coge desde la ordenada hasta la normal, se llama *subnormal*. 46.

La linea *LO*, la qual al mismo tiempo que es paralela á la tangente *MT*, remata en un punto *O* del diámetro *MD*, se llama *ordenada* al mismo diámetro.

Una linea quadrupla de la distancia que hay desde el punto *A* ó *M*, origen del exe ó del diámetro, á la directriz *SD*, se llama *parámetro* del exe ó del diámetro.

Finalmente, llamamos *radio vector* una linea *FM* tirada desde el focus á la curva.

363 Por estar todos los puntos de la parábola á la misma distancia del punto *F* que de la directriz, se sigue que $AF = AS$. El punto *A* se llama el *vértice* de la parábola.

364 *En la parábola, el quadrado de una ordenada* PM *es igual al producto de la abscisa* AP *por el parámetro.*

Llamemos $AP = x$; PM, y; $AS = AF$, a; el parámetro, $p = 4a$ (262); la linea $FP = AP - AF$ será $x - a$. Esto supuesto, el triángulo rectángulo EPM da $(FM)^2 = (PM)^2 + (FP)^2$; ó, porque $FM = MD = AP + AS = x + a$, $(x+a)^2 = y^2 + (a-x)^2$, ó, $y^2 = (x+a)^2 - (a-x)^2 = x^2 + 2ax + a^2 - x^2 + 2ax - a^2 = 4ax = px$; luego $y^2 = px$. Esta es la equacion de la parábola. Luego 46.

365 1.° *Los quadrados de dos ordenados* y, u *son como sus abscisas* x, z.

Porque (264, p.209) $y^2 = px$, $u^2 = pz$, y por consiguiente $y^2 : u^2 :: px : pz :: x : z$.

Fig. 366 2.° Ya que $y^2 = px$, será $p : y :: y : x$; luego *la ordenada es media proporcional entre el parámetro y la abscisa.*

367 3.° Por ser $y^2 = px$, será $y = \pm \sqrt{px}$; luego *á cada abscisa corresponden dos ordenadas iguales; la una positiva* PM; *la otra negativa* Pm (248, p.204).

368 Síguese de aquí que al paso que x crece, tambien crece y; luego *las ramas de la parábola se alargan al infinito, apartándose mas y mas del exe.*

Si hiciéramos negativa x, quiero decir, si tomáramos las abscisas mas allá de A en el exe prolongado, tendríamos $y^2 = -px$, é $y = \sqrt{(-px)}$, cantidad imaginaria, la qual manifiesta (209) que *la parábola no tiene rama alguna del lado de las abscisas negativas.*

369 Si hiciésemos $x = a$, sería $y^2 = pa = 4a \times a = 4a^2$, $y = \sqrt{(4a^2)} = 2a = \frac{p}{2}$; luego *la ordenada que pasa por el focus de la parábola es la mitad del parámetro, y las dos ordenadas juntas son iguales á todo el parámetro.*

47. 370 Cuestion. *Tirar por un punto dado* M *una tangente á la parábola.*

Desde el punto C tírese al focus la CF, y al punto D la CD, y á la directriz la perpendicular CE; desde el punto G tírese al focus la GF, al punto D la GD, y á la directriz la perpendicular GE; desde la M la MF al focus, y la MD perpendicular á la directriz; la linea MT tirada por el punto M y el punto I medio de la FD, será tangente de la parábola. $CF = CE$ y $GF = GD$ (256, p.208), si los puntos C y G son de la parábola; luego si no se verifica que $CF = CE$ y $GF = GD$, ni C ni G serán puntos de la parábola. Vamos á probarlo.

Ya que $MF = MD$ (256, p.208), si desde el centro

M,

M, y con un radio *MF* se traza un arco desde *F* á *D*, toda linea, qual la *MI*, que pase por el centro *M*, y parta, segun suponemos, por medio en *I* la cuerda *DF*, será perpendicular á la cuerda; luego la *MI* tiene dos puntos equidistantes de *F* y *D*, es á saber el punto *I* y el punto céntrico *M*; luego todos sus demas puntos *G*, *C* estarán á igual distancia de *F* que de *D*; lo propio digo de las lineas *CI*, *GI*. Luego los triángulos *GFD*, *CFD* serán isósceles; luego *FG* = *DG*, *CF* = *CD*; pero por ser rectángulo en *E* el triángulo *GED*, la *GD* es mas larga que *EG*, y por rectángulo en *E* el triángulo *CDE*, la *CD* es mas larga que no la *CE*; luego *GD* = *GF* es mayor que *GE*, y *CD* = *CF* es mayor que *CE*; luego ni *G* ni *C* son puntos de la parábola. Y como lo mismo se puede probar de otro punto qualquiera distinto de *M*, siguese que solo el punto *M* de la *CT* es de la parábola, y que por consiguiente la *CT* que pasa por medio de la *FD* es tangente de la curva. Fig. 47.

371 Ya que *MT* parte por medio la base *DF* del triángulo isósceles *DMF*, tambien partirá en dos ángulos iguales (I 494) el ángulo *DMF*; por manera que será *FMT* = *DMT* = *MTF* (I.347). Luego 1.° el triángulo *TMF* es isósceles (I.442), y *FT* = *FM*; 2.° el ángulo *OMC* = *DMT* (I.347) = *FMT*.

372 Luego, una vez que el triángulo *TFM* es isósceles, la perpendicular *FI* divide en dos partes iguales su base (271, p.211), de lo qual se deduce que *una perpendicular tirada desde el focus á la tangente de la parábola, la parte por medio.*

373 *La subnormal* PQ *es igual á la mitad del parámetro.*

Los triángulos *DSF*, *MPQ* tienen iguales uno con otro los ángulos *F* y *Q*, por ser paralelas las lineas *MQ*, *FD* ambas perpendiculares á *TM*; por otra parte los ángulos *P* y *S* son rectos; y los la- 48.

 dos

Fig. dos PM, SD iguales (I.471); luego los tales triángulos tienen un lado igual cada uno al suyo, é iguales los ángulos adyacentes á dicho lado, y por lo mismo son de todo punto iguales; luego $FS = PQ$; pero $SF = 2a = \frac{p}{2}$.

374 De aquí se infiere 1.° que por ser (I. 581) $(MQ)^2 = (PM)^2 + (PQ)^2$, será $(MQ)^2 = y^2 + \frac{p^2}{4} = px + \frac{p^2}{4}$, pues $y^2 = px$ (264, p.209); luego *la normal* $MQ = \sqrt{(px + \frac{p^2}{4})}$.

375 2.° Luego $AQ = AP + PQ = x + \frac{p}{2}$.

376 *La subtangente* PT *es dupla de la abscisa* AP; *quiero decir que* PT = 2x.

48. Porque del triángulo rectángulo QMT sacarémos (I. 522) $PQ : PM :: PM : PT$, ó $2a : y :: y : PT = \frac{y^2}{2a} = \frac{px}{2a} = \frac{4ax}{2a} = 2x$.

377 Luego el triángulo MPT es igual al paralelogramo $MPAN$; porque ambas figuras tienen una misma base MP, y la altura del triángulo es dupla de la altura del paralelogramo; luego el paralelogramo y el triángulo son iguales.

378 Luego 2.° Para tirar una tangente por un punto M de una parábola, se baxará la ordenada PM, se hará $AT = AP$, y tirando la TM por los puntos T y M esta será la tangente, por ser la subtangente $= 2AP = 2x$ (276, p.212).

379 3.° Luego $(TM)^2 = (MP)^2 + (TP)^2 = y^2 + 4x^2 = px + 4x^2$; luego *la tangente* $TM = \sqrt{(px + 4x^2)}$.

380 *El radio vector* FM, que llamarémos r, es $= x + \frac{p}{4}$; porque, segun lo demostrado (271, p.212) $FM = FT$; pero $TP = 2AP$ (276, p.212) $= 2x$,

y

y $FT = TP + AF - AP = 2x + a - x = x + a =$ Fig.
$x + \frac{p}{4}$ (256, p.208); luego &c.

381 *El parámetro* q *de todo diámetro* MD *es igual al parámetro* p *del exe mas el quádruplo de la abscisa.*

Porque $q = 4MD = 4PS$; pero $PS = AP + AS$ 48.
$= x + a$; luego $q = 4x + 4a = 4x + p$.

382 Luego 1.° *El parámetro del exe es el menor de todos los parámetros.*

383 Luego 2.° *El parámetro* q *de un diámetro es tercera proporcional á la abscisa y á la tangente correspondiente al origen* M *del diámetro.*

Porque la tangente es $= \sqrt{(px + 4xx)}$, y $x : \sqrt{(px + 4xx)} :: \sqrt{(px + 4xx)} : \frac{px + 4xx}{x} = p + 4x$.

384 *El triángulo* LOB *que causan la ordenada al diámetro* MO, *la parte* LB *de la ordenada al exe, que* 49.
coge desde la parábola hasta el diámetro, y la parte BO *del diámetro, que coge desde el punto donde le encuentran su ordenada y la ordenada al exe es igual al paralelógramo* MOTV, *que forman el exe, el diámetro, la tangente y la ordenada al diámetro.*

Porque $(MP)^2 : (LQ)^2 :: AP : AQ$ (265, p. 209) $:: AP \times PM : AQ \times PM :: PMNA : QBNA$; pero los triángulos MPT, LQV, que son semejantes por tener paralelos sus lados, tienen uno con otro la misma razon que los quadrados de sus lados homólogos, ó la de $(MP)^2$ á $(LQ)^2$; luego $MPT : LQV :: PMNA : QBNA$, ó $MPT : PMNA :: LVQ : QBNA$; pero $MPT = PMNA$ (277, p.212); luego $LVQ = QBNA$. Si de estas dos figuras restamos el trapecio comun $BOVQ$, quedará $LOB = VONA = VOMT$; añadiendo el triángulo AIT, y restando $MIN = AIT$ (I. 452), pues $AT = AP = MN$, los ángulos en N y A son rectos, y los ángulos en I iguales (I.347); luego &c.

Fig. 385 *El quadrado de una ordenada* LO = y *á un diámetro* BM *es igual al producto de la abscisa* MO, *que llamaremos* u, *por el parámetro* q *del mismo diámetro.*

49. Los triángulos LBO, MPT, semejantes porque tienen paralelos cada uno al suyo todos sus lados, dan $(LO)^2 : (TM)^2 :: LOB : MPT :: OMTV : MNAP$; pues (284, p. 213) $LOB = OVMT$, y (277, p. 212) $MPT = MNAP$. Pero como los paralelogramos $OMTV$, $MNAP$ están entre unas mismas paralelas NO, TV, y tienen una misma altura, tienen uno con otro la misma razon que sus bases $TV = OM$, y AP (I. 574); luego $(LO)^2 : (TM)^2 :: MO : AP$, ó $yy : u :: px+4x^2 : x$; luego $yy = u \times \frac{px+4x^2}{x} = x \times (p+4x) = qu$, por ser $p=4x = q$ (281, p. 213).

386 Luego respecto de otra ordenada z, y su abscisa t, tendremos $z^2 = qt$; luego $yy : zz :: qu : qt :: u : t$, y quiere decir que *los quadrados de las ordenadas á un diámetro son entre sí como las abscisas correspondientes.*

387 Luego por ser $yy = qu$, ó $y = \pm\sqrt{qu}$, se infiere 1.° que á cada abscisa u corresponden dos ordenadas iguales, una positiva OL, otra negativa OL; 2.° que la equacion de la parábola respecto de sus diámetros es la misma que respecto de su exe, sin mas diferencia que ser las ordenadas al diámetro oblicuas respecto de la misma linea, y las ordenadas al exe perpendiculares.

De la Elipse.

50. 388 La elipse es una curva $ABab$ en la qual la suma de las lineas MF, Mf tiradas desde cada uno de sus puntos á dos puntos fixos F, f, llamados los *focus*, siempre es igual á su exe mayor Aa.

La

La linea *Bb* perpendicular al medio del exe mayor *Aa*, se llama el *exe menor*. Fig.

La parte *AP* ó *Pa* del exe, que coge desde la ordenada hasta el punto *A* ó *a* donde el exe encuentra la elipse, se llama *abscisa*.

Tangente de la elipse se llama toda linea *MT* que toca la curva sin cortarla; y *subtangente* la parte *PT* del exe que coge desde la ordenada hasta el punto *T* donde la tangente encuentra el exe prolongado.

La *normal* es una linea *MQ* perpendicular á la tangente en el punto de contacto *M*, la qual remata en el exe: la *subnormal* es la parte *PQ* del exe que coge desde la ordenada, hasta el punto donde la *normal* encuentra el exe. 50.

La distancia $CF = Cf$ que hay desde el medio del exe mayor, cuyo punto es el *centro* de la curva, á cada *focus*, se llama la *excentricidad*.

El *parámetro* de un exe es una linea tercera proporcional al mismo exe y al otro.

Finalmente, *radio vector* se llama toda linea *FM* ó *fM* tirada desde el focus á la curva.

389 Haremos constantemente el semiexe mayor de la elipse *AC* ó $aC = a$, el semiexe menor $= b$; la excentricidad $Cf = c$; la ordenada $PM = y$; y la abscisa $aP = x$. Con esto $AP = Aa - aP = 2a - x$, y $AP \times Pa = (2a - x) \times x$ será $2ax - xx$. Pero quando el origen de las abscisas esté en el centro *C*, llamaremos $CP = x$, $Pa = Ca - CP$ será $a - x$, y $PA = CA + CP$ será $= a + x$; en cuyos supuestos el producto de las dos abscisas $AP \times Pa$ será $(a+x) \times (a-x) = aa - xx$.

290 *El semiexe menor de la elipse es medio proporcional entre la distancia del uno de los focus* F *ó* f *á cada uno de los extremos* A *y* a *del exe mayor.*

Fig. Porque $AF = AC - CF = a - c$, y $aF = aC + CF = a + c$; pero el triángulo rectángulo BFC da $(BC)^2 = (BF)^2 - (CF)^2$, y $BF = Bf$, porque los triángulos BCF, BCf tienen iguales los dos lados que cau-
51. san el ángulo recto, y son por lo mismo iguales (I.453); luego $BF = Bf$. Y como (288, p.214) $BF + Bf = 2a$, síguese que $BF = a$, y $(BF)^2 = a^2$; luego la equacion $(BC)^2 = (BF)^2 - (CF)^2$ se transforma en $b^2 = a^2 - c^2 = (a-c)(a+c) = AF \times Fa$; luego $a - c : b :: b : a + c$.

391 *El quadrado de la ordenada del exe mayor de la elipse se ha al producto de sus abscisas, como el quadrado del semiexe menor al quadrado del semiexe mayor.*

Ya que $Mf + MF = 2a$ (288, p.214), si llamamos $2d$ la diferencia que va de MF á Mf será el radio
50. vector menor $Mf = a - d$ (115), y el mayor MF será $= a + d$. Luego $(Mf)^2 = a^2 - 2ad + dd$, y $(MF)^2 = aa + 2ad + dd$; pero los triángulos rectángulos MPf, MPF dan $(Mf)^2 = (PM)^2 + (Pf)^2$, $(MF)^2 = (PM)^2 + (PF)^2$, y $Pf = Cf - CP = c - x$, y $PF = c + x$, contando las abscisas desde el centro C; luego tendrémos estas dos equaciones.

$$a^2 - 2ad + dd = y^2 + c^2 - 2cx + x^2$$
$$a^2 + 2ad + dd = y^2 + c^2 + 2cx + x^2$$

Si restamos la primera de la seguuda, sacarémos $4ad = 4cx$, de donde sale $d = \frac{4cx}{4ax} = \frac{cx}{a}$ y $d^2 = \frac{c^2x^2}{a^2}$. Substituyendo estos valores de d y dd en la primer equacion, sacarémos $aa - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = yy + cc - 2cx + xx$. Con borrar en cada miembro $-2cx$, y trasladar, saldrá $aa - cc - xx + \frac{c^2x^2}{a^2} = yy$, ó $(aa-cc)a^2 - xxaa + c^2x^2 = aayy$; y teniendo presente que $aa - cc = bb$ (290, p.215), y por lo mis-

mismo $(-a^2+c^2)xx=-bbxx$, echarémos de ver que la equacion se transforma en $bbaa-xxbb=aayy$, ó $b^2(a^2-x^2)=aayy$, de donde se saca $yy : aa-xx :: bb : aa$. Fig.

392 Luego *los quadrados de las ordenadas al exe mayor de la elipse tienen unos con otros la misma razon que los productos de sus abscisas correspondientes.*

393 Luego si sobre el exe mayor Aa como diámetro trazamos un círculo, y llamamos $2b$ el otro exe Bb, será (I.534) $(PN)^2=AP\times Pa$; por consiguiente $(PM)^2 : (PN)^2 :: (CB)^2 : (CA)^2 :: bb : aa$. Luego finalmente $PM : PN :: b : a$. 51.

394 La equacion (291, p.216) $y^2a^2=b^2\times(a^2-x^2)$, ó $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ dá $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$; lo que manifiesta que á cada abscisa CP corresponden dos ordenadas iguales, la una positiva PM, y la otra negativa Pm; 2.° Si en la equacion $y=\pm\frac{b}{a}(a^2-x^2)$ hacemos $x=a$, será $y=0$; pero si hacemos $x>a$, la cantidad $\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$ será imaginaria; luego *la elipse no pasa de los extremos* A *y* a *del exe mayor.* 50.

395 Si contáramos las abscisas desde el vértice A, el producto de las abscisas sería $2ax-x^2$, y la equacion de la elipse $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ se convertiría en $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$.

396 Una vez que el parámetro p del exe mayor se halla con hacer $2a : 2b :: 2b : p$ (288, p. 214) será $\div 2a : 2b : p$, que da (I.210) $2a : p :: 4a^2 : 4b^2$, esto es, $\frac{2a}{p}=\frac{4a^2}{4b^2}=\frac{a^2}{b^2}$, ó $\frac{p}{2a}=\frac{b^2}{a^2}$. Y si en las equaciones de la elipse sacadas antes, substituimos en lugar de $\frac{b^2}{a^2}$ su igual $\frac{p}{2a}$, sacarémos $y^2=\frac{p}{2a}(a^2-x^2)=\frac{pa}{2}-\frac{px^2}{2a}$, é $y^2=px-\frac{px^2}{2a}$.

Fig.

397 Si los dos exes fuesen iguales, las equaciones $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, é $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - xx)$ se reducirian á $y^2 = a^2 - x^2$, é $y^2 = 2ax - xx$, las quales pertenecen al círculo; luego *el círculo es una elipse cuyos dos exes son iguales.*

398 Para sacar la equacion de la elipse respecto
51. de su exe menor, considerarémos que $Mp = CP = x$, y $Cp = PM = y$; y como por lo probado (291, p. 216) $yy : aa - xx :: bb : aa$, sacarémos $aayy = bbaa - bbxx$, que da $bbxx = aabb - aayy$, de donde sale $xx : bb - yy :: aa : bb$, y $xx = \frac{aa}{bb}(bb - yy)$.

Por consiguiente *el quadrado de una ordenada al exe menor se ha al producto de sus abscisas, como el quadrado del semiexe mayor al quadrado del semiexe menor.*

399 De la equacion $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$, la qual da $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{(b^2 - y^2)}$ sacamos 1.º que á cada abscisa del segundo exe de la elipse corresponden dos ordenadas, la una positiva pM, la otra negativa pm; luego *el segundo exe divide la curva en dos partes iguales, del mismo modo que el primero*; 2.º que y no puede ser mayor que b.

400 El parámetro q del exe menor de la elipse se saca con hacer $2b : 2a :: 2a : q$; de donde sale (I. 210) $2b : q :: 4b^2 : 4a^2 :: b^2 : a^2$, ó $\frac{a^2}{b^2} = \frac{q}{2b}$. Y si substituimos este valor de $\frac{a^2}{b^2}$ en la equacion de la elipse correspondiente al exe menor; sacarémos $x^2 = \frac{qb}{2} - \frac{qyy}{2b}$.

401 *Las dos ordenadas juntas que pasan por el focus* F *de la elipse son iguales al parámetro del primer exe.*

Por-

Porque si en la equacion $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ supo- Fig.
nemos $x = c$, se transformará en $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (a^2 - c^2) = \frac{b^4}{a^2}$, por ser $bb = aa - cc$ (290, p. 215), de donde sacarémos $y = \frac{b^2}{a}$, y $2y = \frac{2b^2}{a} = p$, porque (296, p. 217) $2a : 2b :: p = \frac{4b^2}{2a} = \frac{2b^2}{a}$.

402 Cuestion. *Tirar una tangente á la elipse por uno de sus puntos* M *determinado.*

Prolónguese el radio vector FM de modo que $ML = Mf$, y despues de tirada la Lf, tírese por su medio I, y el punto M la MT, esta será la tangente de la 52.
elipse en el punto dado M.

Con efecto, ningun otro punto Y de la MT es de la elipse. Porque $FM + Mf = FL = 2a$; pero por ser $Mf = ML$, y MT perpendicular al punto medio I de la fL, todos los puntos de la MT están á igual distancia de f que de L; luego $YL = Yf$ (I. 352), luego $YF + YL = YF + Yf$; pero $YF + YL$ vale mas que $FL = 2a$; luego $YF + YF > 2a$, y por consiguiente el punto Y no es de la elipse. Lo mismo se probará de otro punto qualquiera de la MT que no sea el punto de contacto M.

403 Luego *los ángulos que forma la tangente de una elipse con los dos radios vectores que rematan en el punto de contacto son iguales.*

Porque el ángulo $fMI = IML$ (I. 494) $= YMF$ su opuesto al vértice.

404 Cuestion. *Hallar la expresion general de los radios véctores* FM, fM *de la elipse.*

Llamarémos $2d$ la diferencia que va de FM á fM, y será (291, p. 216) $d = \frac{cx}{a}$; luego $FM = a + \frac{cx}{a} = \frac{a^2 + cx}{a}$, y $fM = a - \frac{cx}{a} = \frac{a^2 - cx}{a}$.

405 Cuestion. *Hallar la expresion de la subnormal* 52.
PQ *de la elipse.*

Las

Fig. Las lineas QM y fI, perpendiculares á MT han de ser por precision paralelas, y por consiguiente (I. 502) $FL = 2a : Ff = 2c :: ML = Mf = \frac{a^2 - cx}{a}$ (304, p. 219) : $Qf = 2c \times \frac{(a^2 - cx)}{2aa} = \frac{a^2c - ccx}{aa}$. Pero $PQ = Qf - Pf$, y $Pf = Cf - CP = c - x$; luego $PQ = \frac{aac - ccx}{aa} - c + x = \frac{a^2x - c^2x}{a^2} = \frac{b^2x}{a^2} = \frac{px}{2a}$, con reducirlo todo á quebrado, borrar los términos que se destruyen, y tener presente (290, p. 215) que $aa - cc = bb$, y $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{2a}$ (256, p. 217).

406 Cuestion. *Hallar la expresion de la subtangente* PT *de la elipse.*

Si desde el punto Q tiramos á la tangente la perpendicular QT, el triángulo rectángulo QMT

52. dará (I. 522) $QP : PM :: PM : PT = \frac{(PM)^2}{PQ} = \frac{y^2}{PQ}$; pero $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, y $PQ = \frac{b^2x}{a^2}$ (305, p. 219) luego $PT = \frac{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}{\frac{b^2x}{a^2}} = \frac{a^2 - x^2}{x}$.

407 Luego 1.° $CP \times PT = a^2 - x^2$, y por consiguiente, si hacemos $PT = S$, será $S, x = a^2 - x^2$.

408 2.° Luego $CT = \frac{a^2}{x}$, por ser $CT = \frac{a^2 - x^2}{x} + x = \frac{a^2 - x^2 + x^2}{x} = \frac{a^2}{x}$.

409 3.° De $CT = \frac{a^2}{x}$ se saca $x : a :: a : CT$, ó $CP : Ca :: Ca : CT$, lo que está diciendo que *la CT se halla sacando una tercera proporcional á la abscisa y al primer semiexe.*

De

De la Elipse comparada con sus diámetros. Fig.

410 *Diámetro* de la elipse se llama toda linea la qual como *Mm* pasa por su centro *C*, y remata por am- 53.
bos lados en la circunferencia de la elipse.

Toda linea *Nn* que á un tiempo pasa por el centro y es paralela á la tangente *MT* tirada por el extremo *M* de un diámetro, se llama *diámetro conjugado* del primero *Mm*, y recíprocamente. En general, dos diámetros son conjugados siempre que el uno es paralelo á la tangente que pasa por el origen del otro.

Toda linea *LO* tirada paralelamente á la tangente *MT* desde un punto qualquiera *L* de la curva hasta encontrar el diámetro, se llama *ordenada* al mismo diámetro.

Finalmente, el parámetro q de un diámetro es una tercera proporcional al mismo diámetro y á su conjugado; por manera que si hacemos $Mm = 2a$, $Nn = 2b$, el parámetro de Mm será $\frac{2b^2}{a}$, y el de Nn será $= \frac{2a^2}{b}$.

411 *El triángulo* PMT *que causan en una elipse la tangente, la subtangente, y la ordenada correspondientes á un mismo punto, es igual al trapecio* aRMP *que forman la abscisa* aP, *la ordenada* PM, *la tangente en el vértice, y una recta* CMR *que pasa por el punto de contacto* M, *y por el centro* C. 54.

Porque como (309, p.220) $CP : Ca :: Ca : CT$, y $CP : Ca :: PM : aR$, por ser paralelas PM y aR, será $Ca : CT :: PM, aR$, y $Ca \times aR = PM \times CT$, ó $\frac{Ca \times aR}{2} = \frac{PM \times CT}{2}$. Pero estas cantidades son iguales á los triángulos CMT, CaR (I.551); luego si de estos dos triángulos iguales se quita la parte comun PMC, tendrémos $TPM = MPaR$. Luego

Un

Fig. 412 1.° Un triángulo *QLV* cuyo lado *QL* es una ordenada al exe, el otro lado una ordenada al diámetro *Mm*, la qual remata en el punto *V* del exe, y cuyo tercer lado es la parte del exe que coge desde su ordenada hasta el punto del mismo exe donde le encuentra la ordenada al diámetro, será siempre igual al trapecio correspondiente *QKRa*.

Porque los triángulos semejantes *PMT*, *QLV* dan $MPT : QLV :: (PM)^2 : (QL)^2 :: (Ca)^2 - (CP)^2 : (Ca)^2 - (CQ)^2$ (292, p 217) $:: MPaR : QKRa$ (porque las diferencias de los triángulos semejantes *CRa*, *CPM*, y *CRa*, *CQK* siguen la misma razon que las diferencias de los quadrados de los lados homólogos); luego $PMT : QLV :: PMRa : QKaR$; pero $PMT = PMRa$ (311, p. 221); luego $QLV = aRQK = QKMT$, con quitar *aRMP*, y añadir su igual *TMP*.

413 2.° Luego el triángulo *LOK* es igual al trapecio correspondiente *MOVT*. Porque acabamos de probar que $QLV = QMKT$; luego con rebaxar la parte comun *QKOV*, sacarémos $LOK = MOVT$.

54. 414 *Todos los diámetros de la elipse están divididos por medio en el centro.*

Porque si tiramos las ordenadas *MP*, *mp*, tomando $CP = Cp$, será por la naturaleza de la elipse, $MP = mp$, y los triángu'os rectángulos *CPM*, *Cpm* tendrán dos lados iguales; luego serán iguales sus hypo-
54. tenusas; luego estos triángulos tendrán iguales todos sus lados y sus ángulos; luego *MCm* será una linea recta, y el diámetro *Mm* estará dividido por medio en *C*.

415 *El quadrado de una ordenada* LO *al diámetro* Mm *de la elipse, se ha el producto* MO × Om *de las abscisas, como el quadrado del semidiámetro conjugado* NC, *al quadrado del primer semidiámetro* MC.

Llamémos *y* la ordenada *LO*; $2a$, el diámetro *Mm*,

Mm; $2b$, el diámetro conjugado *Nn*; x, la *CO*; y Fig.
será en estos supuestos $MO \times Om = aa - xx$. Tirémos ahora la *ND* paralela á *LK*, los triángulos *NDC*, *LOK* serán semejantes; luego $(LO)^2 : (NC)^2 :: LOK : NCD$; pero los triángulos semejantes *CMT*, 54
COV dan $(CM)^2 : (CO)^2 :: CMT : COV$; luego dividendo $(CM)^2 - (CO)^2 : (CM)^2 :: CMT - COV = MOVT : CMT :: LOK : NCD$ (por ser $LOK = MOVT$, y $NCD = CMT$ (313, p.222)) $:: (LO)^2 : (NC)^2$; luego $(CM)^2 - (CO)^2$, ó $(CM + CO) \times (CM - CO) = (a+x)(a-x) = a^2 - x^2 : (CM)^2 = a^2 :: (LO)^2 = y^2 : (CN)^2 = bb$. De aquí se saca $yy : aa - xx :: bb : aa$.

416 Luego 1.° $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$, y por lo mismo á cada abscisa corresponden dos ordenadas iguales, la una positiva, y la otra negativa, luego en la elipse $LO = Ol$.

417 2.° Una vez que respecto de los diámetros se saca la misma equacion (291, p.216) que respecto de los exes, síguese que respecto de los parámetros de los diámetros, y respecto de los diámetros conjugados será la misma equacion que respecto de los exes, y que los diámetros tienen las mismas propiedades que los exes, en todo aquello donde no intervienen los focus.

Luego si contamos las abscisas desde el vértice del diámetro, tendrémos $yy : 2ax - xx :: bb : aa$.

418 3.° Si suponemos $x = 0$, saldrá $y = \pm b$.

419 *Si desde los extremos* M, N *de dos diámetros conjugados tiramos las ordenadas* MP, NZ *al exe mayor de la una elipse, el quadrado de una de las abscisas* 55.
CZ, *la qual coge desde el centro* C *hasta una de las ordenadas, es igual al producto de las abscisas* AP × Pa *correspondientes á la otra ordenada.*

Llamémos $NZ = z$; $TP = s$; $CZ = u$; los triángulos semejantes *PMT*, *NZC* darán $(TP)^2 : (CZ)^2$
::

Fig. :: $(PM)^2 : (ZN)^2$, esto es, $s^2 : u^2 :: y^2 : z^2 :: aa-xx : aa-uu$ (292, p.217); luego con substituir sx en lugar de su igual $aa-xx$ (307, p.220), y poner el tercer término en lugar del segundo, $s^2 : sx :: uu : aa-uu$, ó con partir los dos términos de la primer razon por s, y multiplicarlos despues por x, $sx : xx :: uu : aa-uu$, y componendo $sx : xx+sx :: uu : aa$, ó $sx : uu :: xx+sx : aa$. Pero $aa = xx+sx$ (307, p.220); luego $sx = aa-xx$, $xx = aa-uu$, y $uu = aa-xx$.

420 Como de la equacion $yy = \frac{bb}{aa} \times (a^2-x^2)$ se puede sacar $\frac{a^2y^2}{b^2} = aa-xx$, síguese que respecto de la ordenada NZ, llamada z, tendrémos $\frac{a^2z^2}{b^2} = (aa-uu) = xx$, lo que da $bbxx = zzaa$, ó $b \times x = z \times a$.

421 Si tiramos la CY perpendicular á MT, los triángulos semejantes CZN, TCY darán $NC : NZ$
55. $:: CT = \frac{a^2}{x}$ (308, p.220) $: CY$; luego con substituir bx en lugar de az, $CN \times CY = ab$. Pero si tiramos la NS paralela á la CM, se originará el paralelogramo $MCNS$ formado por los semidiámetros conjugados, el qual $= NC \times CY = ab$, porque NC es la base, y CY la altura del paralelogramo $CNSM$. Luego

El paralelogramo que forman dos semidiámetros conjugados de la elipse es igual al rectángulo de los semiexes; y por consiguiente el paralelogramo de dos diámetros conjugados qualesquiera, siempre será igual al rectángulo de los exes.

Si el punto Z coincidiese con P, las ordenadas y y z serán iguales; y como los semidiámetros conjugados CM, CN son las hypotenusas de los triángulos rectángulos iguales CPM, CNZ, serán iguales uno con otro; y tendrémos $CP = CZ$, ó $x = u$,

y

y $xx = uu$. Si este valor de uu se substituye en la Fig.
equacion $uu = aa - xx$ (319, p. 223), saldrá $xx = aa - xx$, ó $xx + xx = aa$, ó $2xx = aa$, lo que da $xx = a \times \frac{a}{2}$, y $a : x :: x : \frac{a}{2}$. Por consiguiente con tomar CP media proporcional entre la mitad y la quarta parte del exe, y tirar por el punto P una doble ordenada, esta determinará los dos puntos por los quales y por el centro C se tirarán dos diámetros conjugados iguales. Y como en cada lado del centro C no hay sino un punto que dé $a : x :: x : \frac{a}{2}$, y cada uno de ellos da los mismos diámetros, hemos de inferir que *en la elipse no hay mas de dos diámetros conjugados iguales.*

De la Hypérbola.

422 La *hypérbola* es una curva AM de tal naturaleza que la diferencia de las lineas Mf, MF 56.
tiradas desde cada uno de sus puntos M á los puntos fixos f y F, que se llaman los *focus*, es igual á su primer exe Aa.

En esta curva el segundo exe Bb es una linea dupla de CB, lado de un triángulo rectángulo, cuya hypotenusa $AB = CF$, y el otro lado CA es la mitad del primer exe Aa.

Las lineas PM, pM tiradas desde cada punto M de la curva perpendiculares al primero ó segundo exe, son las ordenadas de dichos exes.

Se llaman *abscisas* las partes AP, aP del exe que cogen desde la ordenada hasta el punto A ó a donde el exe encuentra la hypérbola.

Llámase *tangente* toda linea Mt que toca la curva sin cortarla, y se llama *subtangente* la parte PT 57.
ó pt del exe que coge desde la ordenada hasta el punto donde la tangente encuentra el exe.

Fig. Tambien es el *parámetro* de un exe de la hypérbola una tercera proporcional á dicho exe y al otro.

423 Llamarémos a el primer semiexe AC de la hypérbola; el semiexe segundo, b; la excentricidad
56. CF, c; la ordenada PM, y; la abscisa AP, x: así, $Pa = 2a+x$; luego el producto de las abscisas será $2ax+xx$. Pero si contáramos las abscisas desde el centro C, y llamáramos CP, x; sería $PA = x-a$, y $PA = x+a$, y el producto de las abscisas sería x^2-a^2.

424 *En la hypérbola el semiexe menor es medio proporcional entre las distancias del uno de los focus* f *ó* F *á los extremos* a *y* A *del exe mayor.*

Porque el triángulo rectángulo BAC da $(BC)^2 = (AB)^2-(CA)^2$; pero (322, p. 225) $AB = CF = c$; luego $b^2 = c^2-a^2 = (c-a)\times(c+a)$; luego $c-a : b :: b : c+a$.

425 *El quadrado de una ordenada qualquiera al primer exe de una hypérbola se ha al producto de sus abscisas, como el quadrado del semiexe menor al quadrado del semiexe mayor.*

Porque $Mf-MF = 2a$ (322, p. 225); si llamamos $2q$ la suma $fM+FM$, será el radio vector menor $= FM = q-a$, y $fM = q+a$; pero los triángulos rectángulos FMP, fMP dan $(FM)^2 = (PM)^2 + (FP)^2$, $(fM)^2 = (fP)^2+(PM)^2$; de donde se sacan estas dos equaciones

$$qq-2aq+aa = yy+cc-2cx+xx,$$
$$qq+2aq+aa = yy+cc+2cx+xx.$$

Si restamos la primera de la segunda, sale $4aq = 4cx$, de donde sale $q = \frac{4cx}{4a} = \frac{cx}{a}$ y $q^2 = \frac{c^2x^2}{a^2}$. Si substituimos estos valores de q y q^2 en la primera equacion, sale $\frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2 = yy + cc$

$-2cx+xx$; borrando $-2cx$ en ambos miembros, Fig.
y trasladando, $\frac{c^2x^2}{a^2}-xx+aa-cc=yy$. Quitemos el denominador, y saldrá $cc \times xx - aa \times xx + (aa-cc)aa = aayy$, ó $bbxx - bbaa = aayy$ (por ser $cc-aa=bb$ (324, p. 226), y por consiguiente $aa-cc=-bb$); luego $bb(x^2-a^2)=aayy$; de donde sale $yy : xx-aa :: bb : aa$; luego &c.

426 Luego 1.° *En la hypérbola los quadrados de las ordenadas están unos con otros como los productos de sus abscisas.*

427 2.° De la proporcion $y^2 : x^2-a^2 :: b^2 : a^2$ se saca la equacion de la hypérbola $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$, é 66.
$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}$; de donde se infiere (248, p. 204) que cada abscisa CP tiene dos ordenadas una positiva y otra negativa.

428 3.° Y si hacemos x ó $-x=a$, sacarémos $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}=0$, de donde se sigue (252, p. 206) que la curva pasa por los dos vértices A y a. Se extiende del lado de F igualmente que ácia f, y se compone la hypérbola de dos curvas AM, am llamadas *hypérbolas conjugadas*, cuyas ordenadas son tanto mayores, quanto mayores son las abscisas. Estas hypérbolas conjugadas son iguales; porque si tomamos las abscisas positivas y negativas, con tal que sean iguales, la cantidad x^2 siempre será una misma. Si suponemos $x<a=Ca=CA$, y será imaginaria. Luego (254, p. 208) esta curva no tiene punto alguno que corresponda á las abscisas tomadas entre a y A.

429 Si sacáramos la equacion de la hypérbola contando las abscisas desde el vértice A, el producto de las abscisas será $2ax+x^2$ (323, p. 226), y la

 equa-

Fig. equacion de esta curva $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, será $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + xx)$.

430 Una vez que el parámetro p del primer exe se halla (322, p. 225) con hacer $2a : 2b :: 2b : p$, de donde sacarémos (322, p. 225) $2a : p :: 4a^2 : 4b^2 :: a^2 : b^2$; síguese que $\frac{p}{2a} = \frac{b^2}{a^2}$; y si en la equacion de la hypérbola substituimos este valor de $\frac{b^2}{a^2}$, sacarémos $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = \frac{px^2}{2a} - \frac{pa}{2}$, é $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax + xx) = px + \frac{px^2}{2a}$, equaciones de la hypérbola respecto de su parámetro.

431 Quando son iguales los exes de la hypérbola $a^2 = b^2$, y $\frac{b^2}{a^2} = 1$; y la equacion de la hypérbola es entonces $y^2 = x^2 - a^2$; ó $y^2 = 2ax + xx$, si se cuentan las abscisas desde el vértice A. En este caso la hypérbola se llama *equilátera*.

432 Para *sacar la equacion de la hypérbola respecto del segundo exe*, considerarémos que la ordenada Mp al segundo exe es $Mp = CP = x$, y que la abscisa $Cp = PM = y$. Y como por lo probado poco

56. ha (325, p. 226) $yy : xx - aa :: bb : aa$, será $bbxx = aabb + aayy$, de donde se saca $xx : yy + bb :: aa : bb$. Luego 1.° el quadrado de una ordenada qualquiera al segundo exe de la hypérbola es á la suma del quadrado de la abscisa, y del quadrado del semisegundo exe, como el quadrado de la mitad del primero es al quadrado de la mitad del segundo. Luego 2.° la equacion de la hypérbola respecto del segundo exe no se parece á la que se saca respecto del primero.

433 De la proporcion $xx : yy + bb :: aa : bb$ se saca esta equacion $xx = \frac{a^2}{b^2}(bb + yy)$, y de ella estotra $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{(bb + yy)}$, la qual manifiesta

ta que á cada abscisa del segundo exe de una hypérbola corresponden dos ordenadas iguales, la una positiva pM, la otra negativa pm, y por consiguiente el segundo exe tambien divide, del mismo modo que el primero, la curva en dos partes iguales. Fig.
2.º En la hypérbola x puede crecer al infinito; y por consiguiente esta curva se compone de quatro ramas iguales que se apartan al infinito del primero y segundo exe.

434 El parámetro q del segundo exe de la hypérbola se halla con hacer (322, p. 225) $2b : 2a :: 2a : q$; de donde se saca $2b : q :: 4b^2 : 4a^2 :: b^2 : a^2$, ó $\frac{a^2}{b^2} = \frac{q}{2b}$. Si substituimos este valor de $\frac{a^2}{b^2}$ en la equacion de la hypérbola respecto del segundo exe, sacarémos $xx = \frac{qb}{2} + \frac{qyy}{2b}$.

435 *Las dos ordenadas juntas que pasan por el focus de una hypérbola son iguales al parámetro del primer exe.*

Porque si en la equacion $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)$ suponemos $x = c$, dicha equacion se convertirá en $yy = \frac{b^2}{a^2}(cc - aa) = \frac{b^4}{a^2}$, por razon de ser $bb = cc - aa$ (224, p. 226.), luego $y = \frac{b^2}{a}$, y $2y = \frac{2b^2}{a} = p$ (330, p. 228).

436 Cuestion I. *Por un punto dado* M *de una hypérbola tirarle una tangente.*

Tómese en fM la parte $ML = MF$, y despues de tirar LF, tírese por el punto M, y por el punto I medio de FL la MT, esta será la tangente que se pide. 57.

Con efecto, ningun otro punto Y de la MT toca la hypérbola. Porque $fM - FM = fM - ML = 2a = fL$, y $FM = ML$; y como tambien MT es

Fig. es perpendiculaar en medio de FL, todos los puntos de la MT estan igualmente distantes de F que de L (I.352). Pero $fY—YL = fY—YF$ no es igual á $2a = fL$, porque á serlo, sería $fY = fL + LY$, absurdo manifiesto (I. 440); luego el punto Y no es ninguno de los puntos de la hypérbola. Y como se
57. puede probar lo mismo de otro punto qualquiera de la MT que no sea el punto M; se infiere que la linea MT no tiene mas punto comun con la hypérbola que el punto M; luego es tangente.

437 Luego *en una hypérbola los ángulos que forma la tangente con los dos radios véctores que rematan en el punto de contacto, son iguales.*

Porque como MT divide (I.494) en dos partes iguales la base FL del triángulo isósceles FML, los triángulos FMI, MLI tendrán dos lados FI,
57. FM iguales á otros dos lados LI, LM, y el lado MI es comun á ambos; luego serán iguales (I.451), y por consiguiente el ángulo FMI será igual al ángulo $LMI = IMf$; y por otra parte el ángulo fMI es igual al ángulo XMY su opuesto al vértice.

438 Cuestion 2. *Hallar la expresion de los radios véctores* FM, fM *de la hypérbola.*

57. Llamemos $2q$ la suma de FM y fM, y será (325, p. 226.) $FM = q - a = \frac{cx}{a} - a = \frac{cx - a^2}{a}$, y $fM = q + a = \frac{cx}{a} + a = \frac{cx + a^2}{a}$.

439 Cuestion 3. *Hallar la fórmula de la subnormal* PQ *de la hypérbola.*

Por lo probado últimamente la MI es per-
57. pendicular á la FL, ó la FL á la MI; por ser QM la normal de la curva, causa en M un ángulo recto, es por lo mismo perpendicular á la tangente en M, esto es, á la MT, porque normal es lo mismo que perpendicular. Luego ya que la FL

y

y MQ son ambas perpendiculares á la MT, son paralelas, y la FL corta proporcionalmente las lineas fM y fQ. Luego tenemos $fL = fM - ML = fM - FM : fF :: ML = FM : FQ$, ó $2a : 2c :: \frac{cx - a^2}{a} : \frac{c^2x - a^2c}{a^2} = FQ$; pero $FP = CF - PC = c - x$; luego $PQ = FQ + FP = \frac{c^2x - a^2c}{aa} + c - x = \frac{c^2x - a^2x}{a^2} = \frac{b^2x}{a^2} = \frac{px}{2a}$, por ser $c^2 - a^2 = bb$ (324, p. 226.) y $\frac{b^2x}{a^2} = \frac{px}{2a}$ (330, p. 228). Fig. 57.

440 Cuestion 4. *Hallar la fórmula de la subtangente* PT *de la hypérbola.*

El triángulo rectángulo QMT da (I. 522) $QP : PM :: PM : PT = \frac{(PM)^2}{QP} = \frac{y^2}{PQ}$; pero $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$; y $PQ = \frac{b^2x}{a^2}$; luego con substituir en lugar de $(PM)^2$ y de QP sus valores, saldrá $PT = \frac{\frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)}{\frac{b^2x}{a^2}} = \frac{xx - aa}{x}$. 57.

441 Luego 1.° $CP \times PT = x^2 - a^2$; y si hacemos $PT = s$, será $s.x = x^2 - a^2$, y por lo mismo $aa = x^2 - s.x$.

442 2.° Luego $CT = \frac{a^2}{x}$, porque $CT = CP - PT = x - \left(\frac{x^2 - a^2}{x}\right) = \frac{x^2 - x^2 + a^2}{x} = \frac{a^2}{x}$.

443 3.° Del valor de $CT = \frac{a^2}{x}$ se saca $x : a :: a : CT$, ó, substituyendo las lineas que estas letras representan, $CP : CA :: CA : CT$. Luego *para hallar* CT *se ha de buscar una tercera proporcional á la abscisa, y al semiprimer exe.* Una vez hallado el punto T, si por T y M se tira una linea MT, esta será tangente de la hypérbola. 57.

Fig.

De la Hypérbola comparada con sus asymtotos, y sus diámetros.

444 Si por el vértice A de una hypérbola tiramos la YAX perpendicular á CA, y hacemos $AX = AY = CB$, las lineas indefinitas CY, CX tiradas por el centro C, y los puntos Y y X, son
58. las *asymtotas* ó *los asymtotos* de la hypérbola, las lineas DZ, DS, MG, MN se llaman *ordenadas*, y son paralelas á una de las asymtotas ó al uno de los exes.

445 Toda linea MCm que pasa por el centro y remata en las hypérbolas opuestas se llama *diámetro* de la hypérbola.
59.

446 Una linea bCH que pasa por el centro, y es paralela á la tangente MT tirada al extremo M de otro diámetro, se llama *diámetro conjugado* del diámetro Mm; y recíprocamente. En general, se dice de dos diámetros que son conjugados uno respecto de otro, quando el uno es paralelo á la tangente que pasa por el origen del otro. El diámetro conjugado Hb se determina con tirar desde los puntos M y m paralelas á las asymtotas, las lineas Mb, mH, hasta que encuentren la bH.

447 Toda linea LO tirada paralela á la tangente MT desde un punto qualquiera L de la curva hasta encontrar el diámetro, es una *ordenada del*
60. *mismo diámetro.*

El *parámetro* q de un diámetro es una tercera proporcional á dicho diámetro, y á su conjugado.

448 *El rectángulo de las lineas* DZ, DV *ordenadas á las asymtotas paralelas al segundo exe es*
58. *igual al quadrado* bb *del segundo exe.*

Los triangulos semejantes CAY, CPZ dan $a : b :: x : PZ = \frac{bx}{a}$; pero $DZ = PZ - DP = \frac{bx}{a} - y$,

y

y $DV = PV + PD = \frac{bx}{a} + y$; luego $DZ \times DV$ Fig. $= \frac{b^2x^2}{a^2} - y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - \left[\frac{b^2}{a^2} \times (x^2 - a^2)\right]$, con substituir el valor de yy (327, p. 227); pero $\frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^2a^2}{a^2} = bb$; luego &c.

449 De la equacion $DZ \times DV = bb$ se saca $DZ : b :: b : DV$.

450 Luego la hypérbola jamas encuentra la asymtota aunque se le vaya acercando mas y mas.

Porque $PZ = \frac{bx}{a}$, y $(PZ)^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$; pero $(PD)^2 =$ 58. $y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{b^2a^2}{a^2}$; luego PZ siempre es mayor que PD; quiero decir, que un punto D de la hypérbola nunca jamas puede encontrar el punto correspondiente Z de la asymtota. Pero como la equacion $DZ \times DV = bb$ da $DZ = \frac{b^2}{DV}$, y DV va creciendo al paso que la hypérbola se aparta del vértice a, se sigue que DZ mengua, y que la hypérbola se acerca mas y mas á la asymtota CY.

451 *El producto de una ordenada qualquiera* MS *á una asymtota, y paralela á la otra asymtota, por su abscisa* CS *siempre es igual al producto* AK × KC.

Porque los triángulos semejantes KAY, MSZ 61. dan $MS : AK :: ZM : AY = CB :: CB : Mz$ (349); y los triángulos semejantes AKY, MIz dan $AY = CB : Mz :: KY : MI$; luego $MS : AK :: KY : MI$; luego $MS \times MI = AK \times KY$; pero $MI = CS$ por causa del paralelogramo $CIMS$; y las diagonales iguales BA, CY del rectángulo $BCAY$ se cortan en dos partes iguales en K, luego $AK = KY = CK$; luego $MS \times CS = (CK)^2$.

Es patente que $BK = AK$.

452 Si hacemos $CK = c$, $CS = x$, $MS = y$, tendrémos $xy = cc$, y esta es la *equacion de la hy-*

Fig. *hypérbola respecto de sus asymtotas.*

La cantidad cc se llama la *potencia de la hypérbola.*

453 Ya que el triángulo rectángulo CAB da

61. $(BA)^2 = bb + aa$, y $AK = \frac{CY}{2} = \frac{BA}{2}$, será $(AK)^2 = \frac{(AB)^2}{4}$; pero $(AB)^2 = (BC)^2 + (CA)^2 = b^2 + a^2$; luego $\frac{(AB)^2}{4} = \frac{b^2 + a^2}{4}$; luego finalmente $(AK)^2 = \frac{b^2 + a^2}{4}$; luego *la potencia de la hypérbola es igual á la quarta parte de la suma de los quadrados de los semiexes.*

454 *Si desde la una asymtota á la otra tiramos una linea* Rr *que atraviese una hypérbola, las partes* RN, rn *que estan entre cada asymtota y la hypérbola serán iguales.*

62. Porque los triángulos semejantes RNZ, RnV dan $RN : NZ :: Rn : nV$; pero de los triángulos semejantes rnv, rNz se saca $rN : Nz :: rn : nv$. Luego multiplicando ordenadamente estas dos proporciones, sacarémos $RN \times Nr : NZ \times Nz :: Rn \times rn : nV \times nv$; pero $ZN \times Nz = bb$ (348) $= Vn \times nv$; luego $RN \times Nr = Rn \times rn$, ó $RN\ (Nn + nr) = rn \times (RN + Nn)$, ó $RN \times Nn + RN \times rn = RN \times rn + Nn \times nr$. Borrando en cada miembro la cantidad $RN \times nr$, queda $RN \times Nn = rn \times Nn$, y dividiendo por Nn, $RN = nr$.

455 *Luego una tangente* tT *que remata en las asymtotas está dividida por medio en el punto de contacto* M.

62. Porque si suponemos que la recta Rr camina paralela á sí misma ácia M, hasta enrasar con la curva en este punto, los puntos N y n se confundirán con el punto M, será $Rn = MT$, y $nr = Mt$; luego ya que $RN = rn$ (354), será tambien $MT = Mt$.

Los

456 *Los productos de las lineas* RN × Nr, XP × PY &c. *tiradas desde un punto qualquiera de la curva, paralelas á la tangente* Tt, *son iguales uno con otro, y con el quadrado de* TM = Mt = t. Fig. 62.

De los triángulos semejantes RNZ, XPV sacamos $ZN : VP :: RN : XP$; y de los triángulos semejantes Nzr, PvY sacamos $Nz : Pv :: Nr : PY$. Luego con multiplicar estas dos proporciones, $ZN \times Nz : VP \times Pv :: RN \times Nr : XP \times PY$; pero por lo probado poco ha (348), $ZN \times Nz = bb = VP \times Pv$; luego $RN \times Nr = XP \times PY$; y quando el punto N se confunde con el punto M; esto es, quanda rR llega á ser tangente, tenemos $XP \times PY = MT \times Mt = t^2$.

457 *El diámetro* hH *conjugado al diámetro* Mm *es igual á la tangente* TMt *tirada por el origen* M *del diámetro* Mm, *y que remata en las asymtotas.* 59.

Porque el paralelogramo $CHMt$ da $Mt = CH$. El paralelogramo $MTCb$ da $MT = Cb$; luego $Tt = bH$.

458 Luego ya que (355) $Mt = MT$, será $bC = CH$. Esto quiere decir, que *todo diámetro conjugado de la hypérbola está dividido por el medio en el centro* C *de la hypérbola.* Por otra parte se viene á los ojos que si tomamos $ap = AP$, ó $CP = Cp$, los triángulos rectángulos PMC, Cmp serán iguales y semejantes; luego MCm es una linea recta, y $CM = Cm$; luego &c.

459 *El quadrado de una ordenada* LO *al diámetro* Mm *de la hypérbola, es al producto de las abscisas* mO × OM, *como el quadrado del semidiámetro conjugado es al quadrado del primer semidiámetro.* 60.

Llamarémos el primer diámetro $2a$; y el segundo $2b$. Los triángulos semejantes CMT, COD dan $CM : MT = bC :: CO : OD$, ó $a : b :: x : OD$

=

Fig. $=\frac{bx}{a}$; si hacemos $AO=OL=y$, tendrémos DA $=\frac{bx}{a}-y$, $AF=FO+OA=\frac{bx}{a}+y$; luego $AD\times AF=\frac{b^2x^2}{a^2}-yy=bb$, porque $AD\times AF$ $=(MT)^2=b^2$ (356). Trasladando, sale $\frac{b^2x^2}{a^2}-b^2=y^2$, ó $\frac{b^2x^2-b^2a^2}{a^2}=y^2$, de donde se saca $y^2 : x^2-a^2 :: b^2 : a^2$.

Hemos supuesto en esta demostracion que $AO=$
60. OL; porque como CO corta tT por el medio en M (355), ha de cortar tambien la paralela FD por el medio en O (I.504). Y como $LF=AD$ (354), será tambien $AO=OL$.

360 Síguese de aquí 1.° que $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}$, y que por lo mismo á cada abscisa de la hypérbola corresponden dos ordenadas iguales la una positiva, y la otra negativa.

461 2.° Una vez que la equacion respecto de los diámetros es la misma que respecto de los exes, la equacion respecto de los parámetros y de los diámetros conjugados será la misma que respecto de los exes, y las propiedades de los diámetros son las mismas que las de los exes, aquellas por lo menos donde no intervienen los focus. Luego si contamos las abscisas desde el vértice del diámetro, tendrémos $yy : 2ax+xx :: bb : aa$.

462 3.° Si suponemos $x=a$, saldrá $y=0$, luego la hypérbola pasa (256, p.206) por los extremos M,m del diámetro Mm.

463 *El paralelógramo de los diámetros conjugados de la hypérbola es igual al rectángulo de los exes.*

63. Porque $CK=AK=c$, y $CY\times YM=xy=cc$ (452) $=CK\times AK$, de donde se saca $CK : CY ::$ $YM : AK$; luego los triángulos CAK, CYM tienen recíprocos los lados que forman los ángulos K é Y, igua-

iguales por razon de las paralelas *AK*, *MY*; pero Fig.
si por *M* y *A* nos figuramos tiradas las perpendiculares *MN*, *AD* á las bases de estos triángulos, los triángulos *NYM*, *DKA* tendrán un ángulo recto en *N* y *D*, é iguales los ángulos en *Y* y *K*, y por 63.
lo mismo serán semejantes; luego *YM* : *AK* :: *MN* : *AD*; luego *CK* : *CY* :: *MN* : *AD*, y *CK* × *AD* = *CY* × *MN*. Pero *CK* × *AD* es igual al triángulo *CAY* duplo de *ACK*, por tener un mismo vértice *A*, y ser *CY* = 2*CK* (351); asimismo *CY* × *MN* es duplo del triángulo *CYM* = *MCI*; luego es igual al triángulo *CMT* duplo de *MCI*, porque *CI* = *IT* (pues los triángulos semejantes *TCt*, *TMI* dan *TC* : *TI* :: *Tt* : *TM*; y $TM = \frac{Tt}{2}$ (355), luego *TI* = *CI*) luego el rectángulo *CBYA* de los dos semiexes, duplo del triángulo *CAY*, es igual al paralelogramo *CbMT* (duplo del triángulo *CMT*) formado por los dos semidiámetros conjugados *Cb*, *CM*; luego el rectángulo de los exes es igual al paralelogramo de los diámetros conjugados.

De las Secciones cónicas consideradas en el sólido, y método para trazarlas.

464 Las tres curvas cuyas principales propiedades acabamos de demostrar, se llaman, segun diximos al principio, *secciones cónicas*, porque resultan de la seccion hecha de un cono recto con un plano, y resultan distintas curvas, segun varía la situacion del plano secante.

Si se corta el cono *CHI* con un plano *AMB*, de 64.
modo que este plano encuentre los dos lados *CH*, *CI* á un mismo lado del vértice; la seccion *AMM'B* que resulta es una elipse. Hemos de exceptuar el caso en que el plano secante forma con el lado *CI* el mis-

Fig. mismo ángulo que forma el otro lado CH con la base, en cuyo caso la seccion es un círculo; porque entonces la direccion del plano secante no puede menos de ser paralela á la base del cono.

Quando el plano secante no encuentra el uno de
65. los lados, si no se prolonga, resulta la hypérbola AMM'.

Finalmente, la seccion es una parábola AMM',
66. quando el plano secante es paralelo al uno CH de los lados del cono. Vamos á probar estas tres proposiciones.

1.º Si nos figuramos que el cono CHI está cortado con un plano que pasa por una recta tirada
64. desde el vértice C al centro del círculo de la base; esto es, que pasa por el exe del cono, se origina de esta seccion el triángulo BCD que llamarémos *triángulo por el exe*. Cortemos ahora el cono con tres planos AMM', FMG, $HM'I$ perpendiculares á este triángulo, de modo que los dos últimos sean paralelos á la base del cono. Las dos secciones FMG, $HM'I$ serán círculos que encontrarán la seccion AMM' en M y M'. Las intersecciones FG, HI de los planos de estos círculos, y del triángulo por el exe, serán los diámetros de los mismos círculos. Las intersecciones PM, $P'M'$ de dichos círculos con el plano AMM' serán (I.605) perpendiculares al plano del triángulo por el exe, y serán á un tiempo ordenadas de dichos círculos y de la seccion AMM'.

Sentado esto, los triángulos semejantes APG, $AP'I$ dan $AP : AP' :: PG : P'I$, y los triángulos semejantes BFP, BHP' dan $PB : P'B :: FP : HP'$; si multiplicamos ordenadamente estas dos proporciones, saldrá $AP \times PB : AP' \times P'B :: FP \times PG : HP' \times P'I$; pero por la propiedad del círculo (I.534) es $FP \times PG = (PM)^2$, y $HP' \times P'I = (P'M')^2$; luego $AP \times PB : AP' \times P'B :: (PM)^2 : P'M')^2$. Luego los qua-

quadrados de las ordenadas de la seccion AMM' están Fig.
uno con otro, como los productos de las abscisas; y como estas abscisas caen á distintos lados de la ordenada, será AM una elipse (292, p.217); y quando caen al mismo lado de una misma ordenada, la 65.
seccion es una hypérbola (326, p. 227).

En virtud de los mismos supuestos, y por la naturaleza del círculo, tendrémos $(PM)^2 = FP \times PG$, $(P'M')^2 = HP' \times P'I$, ó (porque las paralelas PP', FH, y FP, HP' dan (I. 471) $FP = HP'$), $(P'M')^2 = FP \times P'I$; luego $(PM)^2 : (P'M')^2 :: FP \times PG : FP$ 66.
$\times P'I :: PG : P'I :: AP : AP'$, por razon de los triángulos semejantes APG, $AP'I$; luego los quadrados de las ordenadas tienen unos con otros la misma razon que las abscisas; luego la curva es (265, p.209) una parábola.

465 De lo dicho (296, p. 217 y 230, p. 228) se sigue que si tomamos así en la elipse como en la hypérbola el origen de las abscisas en el vértice, y llamamos $2a$ el exe mayor, la equacion $yy = px \pm \frac{pxx}{2a}$ será de ambas curvas; y como en el supuesto de ser a infinita, la misma equacion, que entonces se reduce á $yy = px$, es la de la parábola, se sigue que *la parábola no se distingue de una elipse cuyo exe mayor es infinito*; la equacion $yy = px \pm \frac{pxx}{2a}$ pertenecerá á las tres secciones cónicas en el supuesto de estar en el vértice el origen de las abscisas.

466 Cuestion. *Declarar un método para trazar qualquiera de las tres secciones cónicas, como sea dado su diámetro, su parámetro, la posicion de sus ordenadas, y se sepa tambien si el diámetro dado es primero ó segundo quando la curva sea una hypérbola.*

Quando se haya de trazar una parábola; sea AHL 67.
un ttiángulo isósceles que tenga uno de sus lados en el

Fig. el diámetro dado AP, prolongado indefinitamente al uno y otro lado de su origen A, y el otro lado AL en la tangente indefinita LAL que pasa por el vértice A. Figurémonos que su base HL se mueva siempre paralela á sí misma, llevándose con el uno de sus extremos L la indefinita LM paralela á
67. AP, y con el otro extremo H la linea HF paralela á AL, é igual al parámetro dado del diámetro AP, la qual se lleva tambien con su otro extremo F la recta FA movible al rededor del punto fixo A. La interseccion continua M de las dos rectas FA, LM trazará, quando la linea HL se mueve dentro del ángulo HAL y su opuesto al vértice, la parábola MAM que se pide.

Porque, si tiramos la ordenada PM al diámetro AP, los triángulos semejantes AHF, APM darán AH ó AL ó $PM : HF :: AP : PM$, y por consiguiente $(PM)^2 = AP \times HF$; luego (265, p. 209) &c.

Quando los puntos F y L están en lados opuestos del diámetro AP, el punto H ha de estar mas arriba del origen A del expresado diámetro.

Por lo que mira á las demas secciones, se prac-
68. ticará lo propio; no habrá mas diferencia sino que la
69. linea LM, la qual para trazar la parábola ha de ser paralela al diámetro Aa, se ha de mover, quando se trate de las demas secciones cónicas, al rededor del punto a del mismo diámetro. Quando se hubiere de trazar la hypérbola, suponemos que el diámetro dado sea un primer diámetro; porque si fuera un segundo diámetro, buscaríamos por lo dicho (346 y 347) primero su conjugado y su parámetro.

Porque, si tiramos MP ordenada al diámetro Aa, los triángulos semejantes aPM, aAL, y APM, AHF dan $aP : PM :: aA : AL$ ó AH; y $AP : PM :: AH : HF$. Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones, saldrá $aP \times PA : (PM)^2 :: aA \times AH : AH$

×

$\times HF :: aA : HF$, ó $:: a^2 : b^2$ (296, p. 217 y 330, p. 228); Fig.
luego &c. (315, p. 222 y 359).

Prevenimos que en la elipse los puntos *H*, *a* han de caer á partes opuestas repecto del punto *A*, y á un mismo lado en la hypérbola, quando los puntos *F*, *L* están en partes opuestas respecto del diámetro *Aa*.

467 De lo dicho sacarémos un *método uniforme y muy seguro en la práctica para trazar por muchos puntos una seccion cónica*. Le propondrémos para la elipse, y será facil aplicarle á las otras dos secciones.

En la tangente *AL* que pasa por el un extremo *A* del diámetro dado *Aa*, se tomará la parte *AG* igual á 70.
su parámetro, y se tirará la indefinita *GF* paralela á *Aa*; se tirarán por el punto *A* tantas rectas *AF*, *AF* &c. quantas se quisieren. En la tangente indefinita *AL* se tomarán las partes *AL*, *AL* &c. iguales á sus correspondientes *GF*, *GF* &c. y se tirarán las rectas *aL*, *aL* &c. Las intersecciones *M*, *M* &c. de las rectas correspondientes *FA*, *La*; *FA*, *La* &c. serán puntos de la elipse, cuyo diámetro es la linea *Aa*, la tangente la linea *AL*, y el parámetro del diámetro *Aa*, la linea *AG*.

Para probar que la curva es con efecto una elipse, tírese *FH* paralela á *AG*, y por el punto *L* la *HL* correspondiente al punto *F*. El triángulo *HAL* será isósceles, pues $AL = GF$ ó *AH*, segun suponemos, y *HF* será igual al parámetro del diámetro *Aa*; concuerda, pues, esta construccion con lo dicho (366).

Como llegan á ser muy grandes las lineas *GF*, *AL* quando se han de hallar los puntos *M* inmediatos al punto *a*; podrán servir para hallar estos puntos la tangente *al* que pasa per el otro extremo *a* del diámetro *Aa*, y la linea *gf* paralela á *Aa*, conforme lo está diciendo la figura.

Si se tiran las ordenadas *MP*, *MP* &c. paralelas á

a tangente *AL*, y se prolongan al otro lado del diámetro *Aa* hasta *M*, *M* &c. de modo, que todas estén divididas en dos partes iguales por el expresado diámetro; es constante que los últimos puntos *M* serán tambien de la elipse.

Podrá servir una misma abertura de compas *GF* ó *AL* para señalar en las lineas *GF*, *AL* quantos puntos *F*, *F* &c. *L*, *L* &c. se quieran; porque siendo en virtud de esto iguales unas con otras todas estas partes, cada *GF* será igual á la correspondiente *AL*, y este es el fundamento de la demostracion.

DE LAS FUNCIONES.

468 EN las cuestiones que los matemáticos se proponen entran siempre ó quasi siempre varias cantidades de tal modo enlazadas unas con otras, que quando alguna de ellas padece alteracion, sea la que fuere, dé incremento ó decremento, tambien la experimentan otras, aunque sea de distinta especie; porque en algunos casos quando una de las cantidades crece, otras menguan, y al reves.

Las cantidades entre las quales hay este enlace, relacion ó dependencia, de modo que al incremento ó decremento de unas se sigan incrementos ó decrementos de las demas, se llaman *funciones* unas de otras, y las darémos á conocer recordando una cuestion resuelta en la Arismética (I. 180).

Allí nos propusimos averiguar qué obra harian en cierto tiempo 60 hombres, en el supuesto de haber hecho 268 varas 40 hombres en el mismo tiempo, siendo por otra parte iguales las demas circunstancias. Claro está que si el número 60 de los hombres fuese mayor, mayor sería tambien el número de varas que harian de obra, y que si el número de los hombres menguára, tambien menguaría el número de varas de obra. El número de hombres, de cuyos aumentos ó decrementos pende el que crezca ó mengue la obra, es una funcion del número que expresa sus varas. Pero este término *funcion* tiene un sentido dilatadísimo, y significa *todos los modos posibles de determinar una cantidad por medio de otras*.

469 Claro está que como no hay sino las cantidades variables cuyo valor puede mudar, solas ellas hemos de considerar quando tratamos de las funciones. Supongamos, pues, que sea x una cantidad va-

riable; toda cantidad variable cuyo valor pendiere del valor de x será funcion de x, tales son su quadrado xx, sus demas potencias, y todas las cantidades que padezcan alguna alteracion siempre que crezca ó mengue x.

470 Por ser esencia de toda funcion el que de sus mudanzas se sigan tambien mudanzas en la cantidad con la qual está enlazada, tenemos una señal que no puede fallar para distinguir las funciones verdaderas de las que no son mas que aparentes. Porque aparente no mas será toda funcion en la qual se alterará el valor de la variable, sin que por esto mude de valor la cantidad cuya funcion fuere v. gr. x^0, 1^x, $\frac{aa-ax}{a-x}$ son funciones de x en la apariencia no mas, porque no mudan de valor, aunque se substituya en lugar de x la cantidad que se quiera.

471 Considerémos ahora quales son las alteraciones, quiero decir los incrementos ó decrementos de las funciones de x quando á esta se le quita ó añade alguna cantidad; punto facil de aclarar en los casos mas sencillos. Supongamos que á x se le añade la cantidad ω, será con esto $x = x + \omega$, y el quadrado de x será $x^2 = x^2+2\omega x+\omega^2$; por consiguiente el incremento del quadrado xx será $2\omega x+\omega\omega$, y ω incremento de x tendrá con $2\omega x+\omega\omega$ incremento de xx la misma razon que ω con $2\omega x+\omega\omega$, ó, partiéndolo todo por ω, la razon de 1 á $2x+\omega$; y este es el modo de considerar en los demas casos la razon que tiene el incremento de x con el incremento ó decremento que de allí le sobreviene á alguna funcion suya.

472 La averiguacion de la razon que tienen unos con otros estos incrementos es una de las doctrinas mas importantes y dilatadas del analisis y el fundamento de todo el cálculo de los infinitos. Con la mira de manifestarle con toda claridad, volverémos á

con-

considerar el incremento $2\omega x+\omega\omega$ del quadrado xx, quando á x le sobreviene el incremento ω; cuyos incrementos hemos visto que tienen uno con otro la razon de $2x+\omega$ á 1. De aquí se infiere que quanto menor sea el incremento ω, tanto mas esta razon se acercará á la de $2x$ á 1, pues tanto mas podrá omitirse ω, cuyo caso no se puede verificar sino quando se suponga que el incremento ω se desvanece del todo, ó es despreciable por su pequeñez. Por consiguiente siempre que supongamos que el incremento ω de la cantidad variable x llega á desvanecerse ó ser nulo, tambien se desvanecerá el incremento correspondiente á su quadrado xx, bien que tendrá con él otro la razon de $2x$ á 1. Lo mismo debe entenderse de las demas potencias de x, cuyos incrementos evanescentes, quando x experimenta un incremento evanescente, tiene con este una razon determinada y señalada.

DE LAS SERIES.

473 En la Arismética se encuentran operaciones que no se pueden apurar, como quando ocurre v. gr. partir por un número dado otro que no es múltiplo suyo, ó sacar la raiz de un grado determinado de una cantidad que no es potencia perfecta del mismo grado. Verdad es que prosiguiendo la division ó extraccion nos acercamos quanto queremos al valor del cociente ó raiz, de modo que el que sacamos y el verdadero discrepan uno de otro una cantidad despreciable. Con la misma dificultad, y en iguales circunstancias tropezamos en el Algebra, donde continuando la division ó extraccion de la raiz sacamos para expresarla una multitud, y sacaríamos, si quisiésemos una infinidad de términos sin alcanzar jamas su verdadero valor, ó la cantidad

 que

que pueda expresarle cabal. Si nos empeñáramos v. gr. en partir a por $a+x$, executando la division saldría el cociente $1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} +$ &c. cuya expresion consta de una multitud ó *serie* de términos, y constaría de una infinidad de términos si la continuáramos quanto cabe. Si sacáramos el valor de $\sqrt{(aa+xx)}$, ó la raiz quadrada de $aa+xx$, saldría $a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} +$ &c.

474 Estas expresiones, y todas las de su forma, son conocidas con el nombre de *series infinitas*, y son de muchísimo recurso en todos los ramos de la Matemática. Pero de un cociente v. gr. sacado por decimales á muchas series hay la notabilísima diferencia, que los términos ó partes decimales de aquel van siendo siempre menores, siendo así que no son pocas las series cuyos términos van siendo siempre mayores; por lo que, quanto aquellos nos aproxîman al valor de la cantidad que buscamos, tanto al contrario estos nos van alejando. Si en el cociente $1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} +$ &c. fuese x mayor que a, los términos de la serie irán creciendo; pero irán menguando si a fuese mayor que x: sea $x = 3$, $a = 2$, los términos serán $\frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{16} +$ &c.; pero si fuese $x = 2$, $a = 3$, serán $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{16}{27} +$ &c.

475 Las series cuyos términos, por ir siempre menguando, se van acercando al valor del cociente ó raiz que se busca, se llaman *series convergentes*, y las que se van alejando, porque sus términos van creciendo, se llaman *series divergentes*. Bien se echa de ver que las series, quanto mas convergentes, tanto mas hacen al caso; así, quanto mayor sea a respecto de x en la serie de poco ha, tanto mas *combergerá* la serie, y tanto mas despreciables serán los términos que se omitieren; si x fuese $= 1$,

y

y $a = 10$, los términos serán $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} +$ &c. ó, expresándolos por decimales, $1+0$, $1+0$, $01+0$, $001+$ &c.

476 Quando los exponentes de la variable de una serie van creciendo, se llama *serie ascendiente*, y *descendiente* si van menguando. De ninguna de estas dos especies de series es circunstancia privativa el ser antes convergente que divergente, ó al reves; pudiendo ser una misma serie con una misma variable, y unas mismas constantes, convergente ó divergente, segun sea el valor de la variable, ora crezcan ó mengüen sus exponentes, considerándola en sí sola, ó con respecto á las constantes. La serie ascendiente $1 + x + x^2 + x^3 +$ &c. Será divergente si x fuese un número entero; será al contrario convergente, si x fuese un quebrado; si fuese $x > a$, la serie $1 + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} +$ &c. será convergente, y será al contrario divergente si fuese $x < a$.

477 En la doctrina de las series se atiende mucho á la diferencia que hay entre sus términos; por manera que se llaman *series arisméticas* aquellas que tienen constantes algunas diferencias; *de primera órden*, quando son constantes sus primeras diferencias, como se verifica en todas las progresiones arisméticas; de *segunda*, *tercera*, *&c. órden*, segun son constantes las segundas, terceras, &c. diferencias, lo que se verifica respectivamente en las series, que son el producto de dos, tres, &c. progresiones arisméticas. Las series geométricas son todas las progresiones geométricas, las quales componen la *primera órden*; las de *segunda*, *tercera*, *&c. órden* son las que se componen de sumar ó restar unas de otras dos, tres, &c. progresiones geométricas.

478 Quando los coeficientes de los términos de alguna serie se componen, por una ley constante, de

los coeficientes de algunos de los términos antecedentes, se llaman *series recurrentes*, porque hay que recurrir á los términos antecedentes para la formacion de los que se siguen. Las series recurrentes se han hecho muy famosas, por cuyo motivo no podemos ménos de darlas á conocer despues de declarar para formar una serie un método mas breve que el propuesto antes (373) al qual sirve de fundamento la siguiente proposicion.

479 *Sea* X *una funcion de* x *expresada con una serie, de modo que sea* $X = a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+$ &c. *si hacemos* $X=0$, *cada uno de los coeficientes* a, b, c, &c. *será* $=0$.

Una vez que x es una cantidad indeterminada ó variable, puede ser su valor el que se quiera, sin que por eso, aunque llegue á ser cero, dexe de subsistir la igualdad de X con la serie. Claro está que quando sea $X=0$, y tambien $x=0$, tambien será $a=0$, pues entónces toda la equacion se reduce á $X=0=a$. No quedará, pues, de la serie mas que $bx+cx^2+dx^3+$ &c. $=0$, cuya expresion partida por x se transforma en $b+cx+dx^2+$ &c. $=0$, de la qual inferirémos tambien $b=0$, discurriendo del mismo modo que quando probamos poco ha que en los mismos supuestos $a=0$.

480 Síguese de aquí que los coeficientes de los términos homólogos de dos series iguales, v. gr. estas $a+bx+cx^2+dx^3+$ &c. $= A+Bx+Cx^2+Dx^4+$ &c. cuyos términos homólogos son los que llevan una misma potencia de la variable son todos iguales cada uno al suyo. Porque si por el supuesto $a+bx+cx^2+dx^3+$ &c. $= A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ &c.; trasladando, tendrémos $\left\{\begin{array}{l} a+bx+cx^2+dx^3+\text{\&c.} \\ -A-Bx-Cx^2-Dx^3-\text{\&c.}\end{array}\right\} = 0$; luego por lo probado (379) será $a-A=0$, $b-B=0$, $c-C=0$, $d-D=0$, cuyas equaciones dan

$a = A$, $b = B$, $c = C$, $d = D$, &c.

481 Ahora dirémos qual es el camino mas breve que el insinuado antes (373) para hallar la serie que exprese el valor de $\frac{1}{a-x}$, y de $\sqrt{(aa-xx)}$.

Harémos $\frac{1}{a-x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. si multiplicamos ambos miembros por $a-x$, saldrá

$$\left.\begin{array}{l} 1 = aA + aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 + \&c. \\ \quad\; - Ax - Bx^2 - Cx^3 - Dx^4 - \&c. \end{array}\right\}$$ de donde

por lo dicho (379) se saca $aA - 1 = 0$, $aB - A = 0$, $aC - B = 0$, $aD - C = 0$, $aE - D = 0$, de la primera de estas equaciones se saca $A = \frac{1}{a}$, y haciendo en las demas las correspondientes substituciones sale $B = \frac{1}{aa}$, $C = \frac{1}{a^3}$, $D = \frac{1}{a^4}$, $E = \frac{1}{a^5}$; y substituyendo estos valores de A, B, C, D, E en la serie indeterminada $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ &c. sacarémos que $\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^3}{a^4}$ + &c.

Para sacar la serie que expresa el valor de $\sqrt{(aa-xx)}$, harémos $\sqrt{(aa-xx)} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 +$ &c. quadrarémos ambos miembros, y sacarémos

$$\begin{array}{l} aa - xx = A^2 + 2ABx^2 + B^2x^4 + 2BCx^6 + \&c. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; 2ACx^4 + 2ADx^6 + \&c. \end{array}$$

ó, con trasladar al segundo miembro los dos términos que componen el primero, cada uno debaxo de su homólogo,

$$\left.\begin{array}{l} A^2 + 2ABx^2 + B^2x^4 + 2ADx^6 \;\; \&c. \\ -a^2 \quad + x^2 + 2ACx^4 + 2BCx^6 \;\; \&c. \end{array}\right\} = 0,$$

de donde sacamos $A^2 - aa = 0$, $2AB + 1 = 0$, $2AC + BB = 0$, $2AD + 2BC = 0$, ó $A^2 = aa$, $2AB = -1$, $2AC = -BB$, $2AD = -2BC$, y finalmente $A = a$, substituyendo ahora el valor de A en el de B, el valor de

de B en el de C, &c. sale $B = -\frac{1}{2a}$, $C = -\frac{1}{8a^3}$, $D = -\frac{1}{16a^5}$, y finalmente $\sqrt{(aa-xx)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} -$ &c.

482 Si en lugar de la serie indeterminada $A+Bx^2+Cx^4+Dx^6+$ &c. hubiéramos tomado $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ &c. el quadrado de esta serie hubiera incluido un término con la primer potencia de la variable, el qual por no tener en $aa-xx$ otro homólogo suyo, de nada hubiera servido, antes hubiera perjudicado al intento. En comprobacion de cuyo reparo, que es muy transcendental, podrán los principiantes hacer el cálculo suponiendo $\sqrt{(aa-xx)} = A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ &c.

483 El método que acabamos de declarar para sacar por aproxîmacion, mediante una serie, el valor de una cantidad cuya variable es la misma que la de la serie á la qual se apela, se llama *método directo de las series*. Hay tambien *método inverso de las series*, ó *regreso de las series*, y es el artificio al qual se apela quando en el supuesto de ser v. gr. $x = ay+by^2+cy^3+dy^4+$ &c. queremos expresar el valor de y por otra serie cuya variable es x, componiéndose sus coeficientes de los de la primera serie que es igual con x.

Para manifestar este artificio harémos

$$\begin{aligned} y &= Ax+Bx^2 + Cx^3 + Dx^4, \text{ y será} \\ y^2 &= \quad A^2x^2+2ABx^3+B^2x^4 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad 2ACx^4 \\ y^3 &= \ldots\ldots\ A^3x^3+3A^2Bx^4 \\ y^4 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ A^4x^4 \end{aligned}$$

multiplicando ahora respectivamente estos valores de y, y^2, y^3 &c. por los coeficientes que llevan en la serie $ay+by^2+cy^3+$&c. sacarémos

$$x = \begin{cases} Aax + aBx^2 + aCx^3 + aDx^4 + \&c. \\ \quad + A^2b + 2ABb + B^2b + \&c. \\ \quad + 2ACb + \&c. \\ \quad + A^3c + 3A^2Bc + \&c. \\ \quad + A^4d + \&c. \end{cases}$$

Si pasamos x al segundo miembro, sacarémos $Aax - x = 0$, ó $Aa = 1$, de donde sale $A = \frac{1}{a}$; $AB + A^2b = 0$, y substituyendo en esta última el valor hallado de A, sacarémos $B = -\frac{b}{a^3}$. Por el mismo camino hallarémos $C = \frac{2b^2 - ac}{a^5}$, $D = \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^7}$, $E = \frac{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3c}{a^9}$, de donde sadrá $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a^3}x^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}x^3 + \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^7}x^4 + \frac{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}x^5$ $+\&c.$ cuya expresion podrá servir de fórmula general en todos los casos parecidos á este.

Si fuese $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5$, y quisiéramos sacar el valor de y en x, tendríamos $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, $d = -1$, $e = 1$ &c. luego sería $y = x + x^2 + x^3 + \&c.$

Si fuese $x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}$ &c. sería $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{4}$, y saldría

$$y = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{120}x^5 + \&c. =$$
$$x - \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{1}{2.3.4}x^4 + \frac{1}{2.3.4.5}x^5 + \&c.$$

484 Supongamos que el valor de y tenga por expresion una serie en cuyos términos no hay mas que potencias impares de x, siendo sus coeficientes respectivos A, B, C, D, &c. por manera que sea $y = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \&c.$ saquemos la fórmula para aplicar á este caso el regreso de las series, ó para hallar el valor de x en y. Harémos

$$\begin{aligned}
x &= ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + \&c. \text{ y será} \\
x^3 &= a^3y^3 + 3a^2by^5 + 3a^2cy^7 \ \&c. \\
&\qquad\qquad\qquad\quad +3abb \\
x^5 &= a^5y^5 + 5a^4by^7 \\
x^7 &= a^7y^7 \ \&c.
\end{aligned}$$

&c.

Luego tendrémos

$$\left.\begin{aligned}
Ax &= Aay + Aby^3 + Acy^5 + Ady^7 + \&c. \\
+Bx^3 &= Ba^3y^3 + 3Ba^2by^5 + 3Ba^2cy^7 \ \&c. \\
&\qquad\qquad\qquad\quad +3Babb \\
+Cx^5 &= + Ca^5y^5 + 5Ca^4by^7 \\
+Dx^7 &= Da^7y^7
\end{aligned}\right\} = y$$

ó

$$\left.\begin{aligned}
&Aay + Aby^3 + Acy^5 + Ady^7 + \&c. \\
&-y + Ba^3y^3 + 3Ba^2by^5 + 3Ba^2cy^7 \\
&\qquad\qquad\qquad\quad +3Babb \\
&\qquad +Ca^5y^5 \quad +5Ca^4by^7 \\
&\qquad\qquad\qquad\quad +Da^7y^7
\end{aligned}\right\} = 0$$

Del cotejo de los términos homólogos saldrá $Aa = 1$, $Ab + Ba^3 = 0$, $AC + 3Ba^2b + Ca^5 = 0$, $Ad + 3Ba^2c + 3Babb + 5Ca^4b + Da^7 = 0$ &c. lo que dará $a = \frac{1}{A}$, $b = -\frac{B}{A^4}$; $c = \frac{3BB - AC}{A^7}$, $d = \frac{8ABC - A^2D - 12B^3}{A^{10}}$ &c.

485 El punto de mas importancia y tambien de mayor dificultad en el asunto de las series es sumarlas, ó sacar la suma de sus términos, del qual darémos una breve noticia.

Desde luego hay en toda serie una expresion algebráica muy reparable y conocida con nombre de *término general de la serie*, por cuyo medio se pueden formar todos sus términos, substituyendo en lugar de la indeterminada n que lleva, y expresa el número de los términos, los números naturales 1, 2, 3, 4, &c.; v. gr. el término general de la serie 1, 7, 13, 19, 25 es $6n-5$, porque si substituimos en lugar de n todos los números na-

naturales, sacarémos unos despues de otros todos los términos de la serie.

486 La *suma general*, *ó el término sumatorio* de una serie es una funcion de n tal, que si en ella se substituye en lugar de n un número entero, sale la suma de tantos términos de la serie, quantas unidades hay en n. La suma general de la serie poco ha propuesta es $3n^2 - 2n$, porque qualquier número entero que se substituya en lugar de n, saldrá la suma de tantos términos, quantas son las unidades de n; y así para sacar la suma de los siete primeros términos harémos $n = 7$, y saldrá 133.

487 Una vez conocida la suma general de una serie, es fácil de sacar su término general. Porque si en la suma substituimos $n-1$ en lugar de n, resultará la suma de todos los términos hasta el término $(n-1)$ inclusive; y si se resta esta suma de la suma general, resultará precisamente el término general.

488 De aquí sacamos que *si la suma de* n *términos de una serie fuese* $An + \frac{Bn}{2}(n+1) + \frac{Cn}{3}(n+1)(n-1) + \frac{Dn}{4}(n+1)(n-1)(n-2)$ &c. *el término general de dicha serie será* $A + Bn + Cn(n-1) + Dn.(n-1)(n-2) + En.(n-1)(n-2)(n-3)$ &c. A, B, C, &c. *son coeficientes dados.*

Porque sea una serie a, b, c, d, e, &c. cuyos términos puedan sacarse por medio de su término general; fórmese otra serie A', B', C', D', E', &c. con la circunstancia que sus términos sean las sumas de los términos de la primera, de modo que se verifique $a = A'$, $a+b = B'$, $a+b+c = C'$, $a+b+c+d = D'$, $a+b+c+d+e = E'$; ya que $a+b+c+d+e = E'$ y $a+b+c+d = D'$, si restamos la segunda equacion de la primera, saldrá $E' - D' = e$, y por consiguiente cada término de la serie es igual á la diferencia de las sumas que siguen inmediatamente. Luego toda fór-

fórmula general que exprese las diferencias de las sumas inmediatas, ó lo que resta de una suma de términos n despues de rebaxar la suma $n-1$, expresará generalmente todos los términos, ó será el término general. Luego si suponemos $E' = An + \frac{Bn}{2}(n+1) + \frac{Cn}{3}(n+1)(n-1) + \frac{Dn}{4}(n+1)(n-1)(n-2)$, y escribimos $n-1$ en lugar de n, saldrá $D' = A(n-1) + \frac{B}{2}n.(n-1) + \frac{C}{3}.n.(n-1).(n-2) + \frac{D}{4}n.(n-1)(n-2)(n-3)$ &c. de donde sale $E'-D' = A + Bn + Cn.(n-1) + Dn.(n-1)(n-2)$ que es con efecto el término general.

489 Aplicarémos la proposicion que acabamos de demostrar para hallar los términos generales y las sumas de los números figurados.

Las series de los números figurados son las siguientes.

Números constantes	1 .	1 .	1 .	1 .	1 .	1	&c.
naturales	1 .	2 .	3 .	4 .	5 .	6	&c.
triangulares	1 .	3 .	6 .	10 .	15 .	21	&c.
piramidales	1 .	4 .	10 .	20 .	35 .	56	&c.
Triángulo-piramidales	1 .	5 .	15 .	35 .	70 .	126	&c.

Donde se ve que todo término de la segunda serie es la suma de los términos de la primera que hay antes de él; cada término de la tercer serie es la suma de los términos de la segunda que hay antes de él; cada término de la quarta serie es &c.

Por decontado, solo con echar la vista á la serie de los números naturales, se ve patentemente que su término general es n, ó el número de los términos. Comparando, pues, la expresion indeterminada $A+Bn+Cn.(n-1)$ &c. del término general con n, sale $A=0$, $B=1$, $C=0$; luego la suma indetermina-

na-

nada $An+\frac{B}{2}n.(n+1)+\frac{C}{3}n.(n+1).(n-1)$ &c. de la suma aplicada á la serie actual será $\frac{n.(n+1)}{2}$, cuya expresion es tambien el término general de la segunda serie. Si se nos ofreciera sumar los cinco primeros términos de la serie de los números naturales, sería $n=5$, y la suma general $\frac{5.6}{2}=15$, igual con el quinto término de la segunda serie.

490 Para sacar la suma de esta, es necesario dar á su término general $\frac{n.(n+1)}{2}$ una forma que proporcione y facilite su cotejo con la expresion indeterminada $A+Bn+Cn.(n-1)+$ &c. con cuyo fin considero que $\frac{n.(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n^2+n-n+n}{2}=\frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n.(n-1)}{2}+n$; y haciendo el cotejo, hallamos $A=0$, $B=1$, $C=\frac{1}{2}$, $D=0$. Por consiguiente la expresion general $An+\frac{B}{2}n.(n+1)+\frac{C}{3}n.(n+1).(n-1)$ &c. de la suma se transforma en $\frac{n}{2}.(n+1)+\frac{n}{6}.(n+1)(n-1)=\frac{n.(n+1).(3+n-1)}{6}=\frac{n.(n+1).(n+2)}{2.3}$, cuya expresion es tambien el término general de la tercer serie. Si hubiésemos de sacar la suma de los seis primeros términos, sería $n=6$, y la suma sería $\frac{n.(n+1).(n+2)}{2.3}=\frac{6.7.8}{2.3}=56$, el qual es tambien el sexto término de la tercer serie.

491 Quando ocurra sacar la suma de esta última, empezarémos dando á su término general $\frac{n.(1+1).(n+2)}{6}$ una forma que facilite su cotejo con $A+Bn+Cn.(n-1)+Dn.(n-1)(n-2)$ &c. Pero tenemos $\frac{n.(n+1).(u+2)}{6}=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}=\frac{n^3-3n^2+2n+6n^2-6n+6n}{6}$ $=$

$= \frac{n.(n-1).(n-2)}{6} + \frac{6n.(n-1)}{6} + \frac{6n}{6} = \frac{n.(n-1).(n-2)}{6}$ $+ n.(n-1) + n$. De aquí se saca $A=0, B=1$, $C=1, D=\frac{1}{6}, E=0$; luego la suma, que está cifrada en $An + \frac{B}{2}n.(n+1) + \frac{C}{3}n.(n+1).(n-1) +$ &c. será $\frac{n}{2}.(n+1) + \frac{n}{3}.(n+1).(n-1) + \frac{n}{24}.(n+1).(n-1).(n-2) = \frac{n.(n+1)}{24}(12+8.(n-1)+(n-1).(n-2)) = \frac{n.(n+1)}{24}[(12+(n-1)(8+n-2)] = \frac{n.(n+1)}{24} \times (n^2+5n+6) = \frac{n.(n+1).(n+2).(n+3)}{2.3.4}$, cuya expresion es tambien el término general de la quarta serie.

Si se consideran los términos generales que hemos sacado de las series, cotejándolos unos con otros, se verá patentemente la ley con que se forman, y pues son n, $\frac{n.(n+1)}{2}$, $\frac{n.(n+1)(n+2)}{2.3}$, $\frac{n.(n+1).(n+2).(n+3)}{2.3.4}$, se sigue que el de la quinta serie será . . . $\frac{n.(n+1).(n+2).(n+3).(n+4)}{2.3.4.5}$, mediante lo qual es facil sacar el término general que se quiera.

492 Hagamos algunas aplicaciones de esta doctrina; propongámonos v. gr. sacar la suma de los quadrados 1, 4, 9, 25, 36 de los números naturales, cada uno de los quales puede figurarse en n^2.

No hay duda en que $n^2 = n^2 - n + n = n.(n-1) + n$, cuya expresion, cotejándola con $A + Bn + Cn.(n-1)$, da $A=0$, $B=1$, $C=1$; por consiguiente la suma de n quadrados, es á saber la expresion $An + \frac{B}{2}n.(n+1) + \frac{C}{3}.n.(n+1).(n-1) = \frac{n}{2}.(n+1) + \frac{n}{3}.(n+1).(n-1) = \frac{n.n+1}{2.3}(3+2.(n-1)) = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{2.3}$. Si buscamos la suma de cinco quadra-

drados, sería $n=5$, de donde saldrá $\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ $=\frac{5.6.11}{6}=55$.

493 En la Aritmética hemos enseñado como se combinan unas con otras las cantidades sea el que fuere su número, ahora enseñarémos como puede cifrarse en una fórmula general el número de combinaciones que admiten; en esta declaracion nos valdrémos de dos series, que la superior expresará el número de cantidades por combinar, y la inferior el número de sus combinaciones. De lo dicho allí se infiere que 2, 3, 4, 5 cantidades por combinar de dos en dos admiten 1, 3, 6, 10, 15 combinaciones; que 3, 4, 5, 6, 7 cantidades por combinar de tres en tres admiten 1, 4, 10, 20, 35 combinaciones; que 4, 5, 6, 7, 8 cantidades por combinar de quatro en quatro admiten 1, 5, 15, 35, 70 combinaciones.

Es patente que los números de las combinaciones son los números figurados (389), y que por lo mismo se han de sacar por las fórmulas enseñadas (389 y sig.).

Por consiguiente la fórmula general en que está cifrado el número de combinaciones que admiten las cantidades combinándolas de dos en dos se sacará del término general $\frac{n.(n+1)}{2}$ de la segunda serie, substituyendo $n-1$ en lugar de n, cuyo término general, mediante esta substitucion, será $\frac{n.(n-1)}{2}$. Si las cantidades por combinar de dos en dos fuesen v. gr. cinco, sería $n=5$, y el número de sus combinaciones sería $\frac{5.4}{2}=10$.

El número de las combinaciones de las cantidades de tres en tres se saca del término general $\frac{n.(n+1).(n+2)}{2.3}$ de la tercer serie, substituyendo $n-2$ en lugar de n, cuyo término, mediante esta subs-

titucion se transforma en $\frac{n.(n-1).(n-2)}{2.3}$.

El número de las combinaciones de las cantidades de quatro en quatro se infiere del término general $\frac{n.(n+1).(n+2).(n+3)}{2.3.4}$ de la quarta serie, substituyendo $n-3$ en lugar de n; cuyo término, mediante esta substitucion, se transforma en. . . $\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{2.3.4}$.

De todo esto se colige lo que debe practicarse para sacar las demas fórmulas pertenecientes á este asunto, pues atendiendo á la ley con que se van formando, se viene á los ojos que el número de las combinaciones de las cantidades de cinco en cinco ha de ser $\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{2.3.4.5}$ &c.

De las Funciones quebradas.

494 Por el papel que hacen estas funciones en la teórica de las series, y otros asuntos, nos toca considerarlas aquí. Que cosa sea una funcion quebrada es escusado explicarlo; pero aquí consideramos las que son quebrados verdaderos, y llevan en ambos términos la variable x, con la circunstancia de ser la mayor potencia de esta variable en el numerador un grado menor que su mayor potencia en el denominador. Si ocurriese aplicar lo que vamos á decir de estas funciones, á alguna que careciese de esta circunstancia, se le dará primero, y se conseguirá partiendo su numerador por su denominador hasta llegar á un residuo cuya variable esté un grado menos elevada en el numerador que en el divisor; dándole al tal residuo por denominador este divisor, se tendrá una funcion con la mencionada circunstancia.

495 Supongamos, para manifestarlo, que trope-

pecemos con la funcion $\frac{x^4+1}{x^2+x}$, en la qual no se verifica la condicion propuesta; si executamos la division saldrá el cociente x^2-x+1, y el residuo $-x+1$, por consiguiente la verdadera funcion quebrada será $\frac{-x+1}{x^2+x}$ ó $\frac{x-1}{x^2+x}$.

Por consiguiente, si esta funcion quebrada, en cuyo numerador es la variable de menor dimension que en el denominador, se resuelve en fracciones parciales, cuyos denominadores son factores de una sola dimension, sus numeradores han de ser cantidades constantes con variable x de ninguna dimension.

496 El empeño grande acerca de toda funcion quebrada es resolverla en otras mas sencillas de cuya suma se compone. Pero así como de ningun producto se pueden sacar mas factores que los que han concurrido á su formacion, tampoco de ninguna funcion quebrada compuesta se pueden sacar mas funciones quebradas sencillas que factores tiene su denominador, una vez que el denominador de la suma de muchas fracciones consta solo de tantos factores quantos son los quebrados sumados.

El denominador de un quebrado propuesto tiene, y puede resolverse en factores lineares iguales ó desiguales unos con otros, ó unos iguales y otros desiguales, ó en factores quadráticos y lineares, lo que sucede quando algunos de sus factores son imaginarios. Son por consiguiente quatro los casos que aquí ocurre considerar.

497 I. Caso. Sea $\frac{x^m}{x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}\ldots q}$ la funcion quebrada por resolver en el supuesto preciso de ser $m<n$. Supondrémos que los factores simples del denominador sean $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, $x-\delta$, de modo

que se verifique $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} \ldots q = (x-\alpha) \cdot (x-\beta) \cdot (x-\gamma) \cdot (x-\delta)$ &c. cuya equacion se reducirá evidentemente á cero, siempre que qualquiera de las cantidades α, β, γ, δ sea $= x$, porque entonces reduciéndose á cero uno de los factores $x-\alpha$, $x-\beta$ &c. será tambien cero el producto de todos. Harémos $\frac{x^n}{x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} \ldots q}$

$$= \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma} + \frac{D}{x-\delta} = \ldots$$

$\frac{x^m}{(x-\alpha) \cdot (x-\beta) \cdot (x-\gamma) \cdot (x-\delta)}$, donde A, B, C, D expresan de un modo indeterminado los numeradores de los quebrados simples que nos toca determinar. Multiplicarémos ambos miembros de la última equacion por $(x-\alpha) \cdot (x-\beta) \cdot (x-\gamma) \cdot (x-\delta)$, y saldrá A, $(x-\beta) \cdot (x-\gamma) \cdot (x-\delta) + B \cdot (x-\alpha) \cdot (x-\gamma) \cdot (x-\delta) + C \cdot (x-\alpha) \cdot (x-\beta) \cdot (x-\delta) + D \cdot (x-\alpha) \cdot (x-\beta) \cdot (x-\gamma) - x^m = 0$.

Diximos poco ha que si x fuese igual con alguna de las cantidades α, β, γ, δ el factor donde esto se verificase sería cero, y lo será por lo mismo todo producto donde él entrare; luego si hacemos x succesivamente igual á cada una de las cantidades α, β, γ, δ, sacarémos $A = \frac{\alpha^m}{(\alpha-\beta) \cdot (\alpha-\gamma) \cdot (\alpha-\delta)}$, B

$= \frac{\beta^m}{(\beta-\alpha) \cdot (\beta-\gamma) \cdot (\beta-\delta)}$, $C = \frac{\gamma^m}{(\gamma-\alpha) \cdot (\gamma-\beta) \cdot (\gamma-\delta)}$,

$D = \frac{\delta^m}{(\delta-\alpha) \cdot (\delta-\beta) \cdot (\delta-\gamma)}$, cuyos valores están manifestando patentemente la ley por la qual se determinan los numeradores A, B, C &c. substituyéndo-

dolos finalmente en su lugar, sacarémos . . . . . .

$$\frac{x^n}{x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} \ldots q} = \ldots\ldots$$

$$\frac{\alpha^m}{(\alpha-\beta).(\alpha-\gamma).(\alpha-\delta).(x-\alpha)} + \frac{\beta^m}{(\beta-\alpha).(\beta-\gamma).(\beta-\delta).(x-\beta)}$$

$$+\frac{\gamma^m}{(\gamma-\alpha).(\gamma-\beta)(\gamma-\delta).(x-\gamma)} + \frac{\delta^m}{(\delta-\alpha).(\delta-\beta)(\delta-\gamma).(x-\delta)}$$

498 Apliquemos la fórmula para la resolucion de esta funcion quebrada $\frac{x^2}{x^3+2x^2-x-2}$, donde $m=2$. Su denominador ha de tener tres factores no mas, porque su variable no pasa de la tercer potencia; luego solo hemos de atender á los tres primeros factores indeterminados que son $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$. Si los sacamos dichos tres factores, hallarémos que son $x+1$, $x-1$, $x+2$ (*); y comparándolos cada uno con su correspondiente, tendrémos $x-\alpha = x+1$, $x-\beta = x-1$, $x-\gamma = x+2$, que dan $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = -2$; luego ya que $A = \frac{\alpha^m}{(\alpha-\beta).(\beta-\gamma)}$ será $A = \frac{-1^2}{-2.1} = \frac{+1}{-2}$, porque la segunda potencia de -1 es $+1$, $B = \frac{\beta^m}{(\beta-\alpha).(\alpha-\gamma)} = \frac{1}{2.3} = \frac{1}{6}$; $C =$

(*) Estos factores se sacan de la resolucion de la equacion x^3+2x^2-x-2, la qual se compone de su multiplicacion. Como esto se logra, se enseña mas adelante respecto de las equaciones numéricas, y se insinúa respecto de las demas, y queda declarado en el Tomo II. de mis Elementos; tambien se manifestará por que una equacion tiene tantos factores como unidades la mayor potencia á que en ella llega la incógnita, y puede inferirse de lo dicho acerca de las equaciones de primero y segundo grado.

$\frac{\gamma^m}{(\gamma-\alpha).(\gamma-\beta)} = \frac{4}{3}$. De todo lo qual sacamos, despues de hechas las correspondientes substituciones . . $\frac{x^2}{x^3+2x^2-x-2} = -\frac{1}{2.(x+1)} + \frac{1}{6.(x-1)} + \frac{4}{3.(x+2)}$.

499 Caso II. Resolvamos la funcion $\frac{x^m}{(x-a)^n}$ en estas $\frac{A}{(x-a)^n} + \frac{B}{(x-a)^{n-1}} + \frac{C}{(x-a)^{n-2}} \dots \frac{H}{x-a}$. Hagamos $\frac{x^m}{(x-a)^n} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{B}{(x-a)^{n-1}} + \frac{C}{(x-a)^{n-2}} \dots \frac{H}{(x-a)}$, de donde, multiplicando ambos miembros por $(x-a)^n$, sale $x^m = A+B(x-a)+C(x-a)^2 \dots H(x-a)^{n-1}$.

Como si la funcion compuesta fuese $\frac{x}{(x-a)^3}$ haríamos $\frac{x}{(x-a)^3} = \frac{A}{(x-a)^3} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-a}$, y saldria $x = A + B(x-a) + C(x-a)^2$, ó . . . .

$$\begin{aligned} x = A &+ Bx + Cx^2 \\ &- Ba - 2Cax \\ &+ Ca^2 \end{aligned} \quad \text{y trasladando} \quad \begin{aligned} A &+ Bx + Cx^2 = 0 \\ &- Ba - 2Cax \\ &+ Ca^2 - x \end{aligned}$$

de donde sacarémos $A - Ba + Ca^2 = 0$, $B - 2Ca = 1$, $C = 0$; luego $B = 1$, $A = a$. Por consiguiente la funcion $\frac{x}{(x-a)^3} = \frac{a}{(x-a)^3} + \frac{1}{(x-a)^2}$.

Ca-

500 Caso III. Resolvamos una funcion cuyo denominador tiene factores iguales y desiguales; para lo qual es necesario buscar separadamente los numeradores de los quebrados que nacen de la resolucion de los factores iguales, conforme vamos á enseñar.

Sea la funcion propuesta $\frac{x^2}{(1-x)^2(2+x)(3-x)}$. Harémos $x^2 = M$, y $(2+x)(3-x) = N$, será con esto $\frac{x^2}{(1-x)^2(2+x)(3-x)} = \frac{M}{N(1-x)^2}$ que supondrémos $= \frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{(1-x)} + \frac{P}{N}$. De aquí sacarémos $M = AN + BN(1-x) + P(1-x)^2$ y $P = \frac{M-AN-BN(1-x)}{(1-x)^2}$; donde la especie P representa la suma de los numeradores que salen de la resolucion del factor N. Como todos los numeradores son números enteros, ó tales los suponemos por lo ménos, P será una funcion entera de x, luego tambien lo será la expresion $\frac{M-AN-BN(1-x)}{(1-x)^2} = P$; luego su numerador ha de ser partible por $(1-x)^2$, y tambien por $1-x$, porque toda cantidad partible por otra es partible por un submúltiplo de esta, y la raiz es un submúltiplo de su quadrado.

Por ser x cantidad variable, admite qualesquiera valores, por lo que podemos hacer $x = 1$, lo que da $x - 1 = 0$; será por lo mismo $BN(1-x) = 0$, y como en este supuesto $P(1-x)^2 = 0$; será $M - AN - BN(1-x) = P(1-x)^2 = 0$ y $M - AN = BN(1-x) = 0$; luego $M = AN$, y $A = \frac{M}{N}$; luego con substituir 1 en lugar de x en los valores de M y N, sacarémos $A = \frac{x^2}{(2+x)(3-x)} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$.

Hallamos poco ha que quando $x = 1$, la cantidad $M - AN - BN(1-x) = P(1-x)^2$ ha de ser partible por $(1-x)^2$ ó por $1-x$, y que en el mismo

supuesto $P(1-x)^2$, ó $P(1-x)=0$; luego tambien será $M-AN-BN(1-x)=0$, ó $\frac{M-AN}{1-x}-BN=0$, lo que finalmente da $B=\frac{M-AN}{(1-x)N}$.

Si en esta expresion hacemos las substituciones que resultan de haber hecho al principio $M=x^2$ y $N=(2+x)(3-x)$, sacarémos $\frac{x^2-\frac{1}{6}(x+2)(3-x)}{(1-x)(x+2)(3-x)}=\frac{6x^2-(x+2).(3-x)}{6(1-x)(x+2)(3-x)}$, cuya expresion, despues de executadas en el numerador la multiplicacion indicada, y las reducciones á que da lugar, se convierte en estotra $\frac{7x^2-x-6}{6(1-x)(2+x)(3-x)}=\frac{-6-x+7x^2}{6(1-x)(2+x)(3-x)}$; partiendo finalmente arriba y abaxo por $1-x$, sale $\frac{-6-7x}{6(2+x)(3-x)}$ ó $\frac{-7x-6}{6(2+x)(3-x)}$, la qual haciendo $x=1$, es $\frac{-13}{3.2.6}$. De aquí sacamos por último que $\frac{x^2}{(1-x)^2N}=\frac{1}{6(1-x)^2}-\frac{13}{36(1-x)}+\frac{P}{N}$.

Una vez hallados los numeradores procedentes de la resolucion del factor $(1-x)^2$, se hallarán por el mismo camino los numeradores de los quebrados procedentes de los factores $x+2$, $3-x$. Busquemos desde luego el numerador correspondiente al denominador $x+2$; con cuya mira harémos $N=(1-x)^2.(3-x)$. De aquí sale $\frac{x^2}{(1-x)^2(3-x)(2+x)}=\frac{M}{(x+2)N}=\frac{C}{x+2}+\frac{P}{N}$; luego $P=\frac{M-CN}{x+2}$. Si hacemos $x=-2$, ó $x+2=0$, $M-CN$ se desvanecerá, ó será $M-CN=0$, ó $C=\frac{M}{N}$, y será en el caso actual $C=\frac{M}{N}=\frac{x^2}{(1-x)^2(3-x)}=\frac{4}{9.5}=\frac{4}{45}$.

Finalmente, se hallará el numerador correspondiente al factor $3-x$, haciendo $N=(1-x).(2+x)$, lo que dará $D=\frac{M}{N}$ quando se hiciere $x=3$; luego

go si D fuere el numerador que se busca, será $D = \frac{9}{4 \cdot 5} = \frac{9}{20}$. Por consiguiente el quebrado propuesto $\frac{x^2}{(1-x)^2 (2+x)(3-x)} = \frac{x^2}{(1+x)^2 \cdot (6+x-x^2)}$ será igual á los quatro quebrados siguientes $\frac{1}{6(1-x)^2} - \frac{13}{36(1-x)} + \frac{4}{45(1+x)} + \frac{9}{20(3-x)}$.

501 Caso IV. Nos resta considerar el caso de una funcion quebrada cuyo denominador tiene factores imaginarios, el qual debe resolverse en factores quadrados que serán reales (2 1 2). Tal es la funcion $\frac{x^2}{x^4+1}$, cuyo denominador x^4+1 tiene quatro factores simples imaginarios, por lo que se le resolverá en dos factores quadrados de esta forma $x^2 - x\sqrt{2}+1$, $x^2+x\sqrt{2}+1$ (*). Harémos $\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x\sqrt{2}+1}$. Despues de reducidos ambos quebrados á un mismo denominador, y sumados, sale $x^2 = (A+C)x^3 + (A\sqrt{2}+B-C\sqrt{2}+D)x^2 + (A+B\sqrt{2}+C-D\sqrt{2})x + (B+D)$, lo que da $(A+C)x^3 + (A\sqrt{2}+B-C\sqrt{2}+Dx^2 + \atop -x^2)$ $(A+B\sqrt{2}+C-D\sqrt{2})x+B+D = 0$, que da 1.° $A+C=0$ y $A=-C$; 2.° $A\sqrt{2}+B-C\sqrt{2}+D = 2A\sqrt{2}+B+D = 1$ (substituyendo A en lugar de $-C$); 3.° $A+B\sqrt{2}+C-D\sqrt{2}=0$, ó $A+B\sqrt{2}-A-D\sqrt{2}=0=B\sqrt{2}-D\sqrt{2}=0$,

ó

(*) Si se multiplican una por otra estas dos cantidades saldrá x^4+1.

$6B-D=0$; 4.° finalmente $B+D=0$, y como tambien $B-D=0$, se sigue que $B=0$, $D=0$. Y como antes hallamos $2A\sqrt{2}+B+D=1$, síguese que $2A\sqrt{2}=1$ y $A=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$. De todo esto saldrá $\frac{x^2}{x^4+1}=\frac{\frac{x}{2\sqrt{2}}}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\frac{-x}{2\sqrt{2}}}{x^2+x\sqrt{2}+1}$.

Lo mismo se practicará quando el denominador tenga factores simples reales con los imaginarios.

De las series recurrentes.

502 Series recurrentes llamamos (378) todas aquellas cuyos términos se forman de uno ó muchos de los antecedentes, con arreglo á una ley determinada, conocida con nombre de *escala de relacion*, tal es la serie que nace de esta funcion quebrada $\frac{a+bx+cx^2+dx^4\ \&c.}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3\ \&c.}$, cuya operacion encierra varios casos.

503 Caso I. Sea $\frac{a}{\alpha+\beta x}$, la funcion quebrada que hemos de reducir á serie. Harémos $\frac{a}{\alpha+\beta x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3$ &c. y multiplicarémos ambos miembros por $\alpha+\beta x$, saldrá $a=\alpha A+\alpha Bx+\alpha Cx^2+\alpha Dx^3$ &c. $+A\beta x+B\beta x^2+C\beta x^3$ sacarémos (379) $\alpha A=a$, $\alpha B+A\beta=0$, $\alpha C+B\beta=$

$= 0$, $\alpha D + C\beta = 0$, de donde sale $A = \frac{a}{\alpha}$, $B = -\frac{A\beta}{\alpha}$, $C = -\frac{\beta B}{\alpha}$ &c. cuyos términos están manifestando que la escala de relacion, ó la ley con que los coeficientes de los términos se componen es tal, que suponiendo el primero $= \frac{a}{\alpha}$, cada uno se compone multiplicando su inmediato antecedente por la cantidad $-\frac{\beta x}{\alpha}$, y por consiguiente será $\frac{a}{\alpha + \beta x} = \frac{a}{\alpha} - \frac{a\beta x}{\alpha^2} + \frac{a\beta^2 x^2}{\alpha^3} - \frac{a\beta^3 x^3}{\alpha^4}$ &c. y si n representa los exponentes, el término general de esta serie será $\frac{a \,.\, \beta^n x^n}{\alpha^{n+1}}$.

504 Caso II. Sea ahora la funcion quebrada $\frac{a+bx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$ para resolverla en serie, harémos como antes $\frac{a+bx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2} = A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+$&c. cuya equacion, despues de executada la acostumbrada multiplicacion, se convierte en estotra

$$a+bx = \left.\begin{array}{l} A\alpha+B\alpha x+C\alpha x^2+D\alpha^3+E\alpha x^4 \\ +A\beta x+\beta Bx^2+C\beta x^3+D\beta x^4 \\ +A\gamma x^2+B\gamma x^3+C\gamma x^4 \end{array}\right\} + \&c.$$

de donde se saca $A\alpha = a$ y $A = \frac{a}{\alpha}$, $B\alpha + A\beta = b$,

ó $B = \frac{b}{\alpha} - \frac{\alpha\beta}{\alpha^2}$; $C\alpha + B\beta + A\gamma = 0$, y $C = \frac{-A\gamma - \beta B}{\alpha}$;

$D\alpha + C\beta + \gamma B = 0$, $D = \frac{-C\beta - B\gamma}{\alpha}$, cuyos valores están manifestando que para sacar cada término, es necesario valerse de los dos antecedentes inmediatos, siendo tal la escala de relacion, que el coeficiente es igual al cociente que sale partiendo por el primer término α la suma de los productos del coeficiente del último por β, y del coeficiente del penúltimo por γ.

505 Si quisiéramos sacar la serie que puede dar el quebrado $\frac{1+2x}{1-2x+3x^2}$, compararíamos sus diferentes términos con los homólogos de la serie general, y sacaríamos $a = 1$, $\alpha = 1$, $b = 2$, $\beta = -2$, $\gamma = 3$, y saldría $A = \frac{1}{1} = 1$, $B = \frac{2}{1} + \frac{2}{1} = 4$, $C = -3+8 = 5$, $D = 10-12 = -2$, $E = -4-15 = -19$, de lo qual saldrá últimamente que $\frac{1+2x}{1-2x+3x^2} = 1+4x+5x^2-2x^3-19x^4$ &c.

506 Caso III. Por el mismo camino hallarémos que cada término de la serie procedente de este quebrado $\frac{a+bx+cx^2}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3}$ se compone de los tres inmediatamente antecedentes, pues haciendo los cálculos expresados saldrá $A = \frac{a}{\alpha}$, $B = \frac{b-A\beta}{\alpha}$, $C = \frac{c-A\gamma-\beta B}{\alpha}$, $D = \frac{d-A\delta-B\gamma-C\beta}{\alpha}$, lo que está manifestando que la serie procedente del quebrado propuesto es recurrente.

Es

407 Es tan general el caso propuesto, que puede aplicarse á qualquier caso particular, como vamos á manifestarlo.

Supondrémos que el denominador es un quadrado, por manera que la fraccion será $\frac{a}{(1-px)^2}$ $= \frac{a}{1-2px+p^2x^2}$. Si cotejamos esta fraccion con la que se consideró antes (404) hallarémos que $a = a$, $b = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = -2p$, $\gamma = p^2$. Luego $A = a$, $B = +2ap$, $C = 3ap^2$, $D = 4ap^3$, y por lo mismo $\frac{a}{(1-px)^2} = a(1 + 2px + 3p^2x^2 + 4p^3x^3 + 5p^4x^4 + \&c.)$. Repárese que si n expresa las potencias de p y x, el término general de esta serie será $(n+1) \cdot p^n x^n$.

508 Por el mismo camino se sacaría que el quebrado $\frac{a}{(1-px)^3} = \frac{1}{1-3px+3p^2x^2-p^3x^3}$ da la serie $a(1+3px+6p^2x^2+10p^3x^3 \ldots \&c.)$ en la qual es de notar que si n expresa las potencias de p y x, como los coeficientes 1,3,6,10 forman la segunda serie de los números figurados, el término general sería $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$, con tal que n señale el número de los términos. Pero como en el caso presente el número de los términos es una unidad mayor que el exponente n, debe substituirse $n+1$ en lugar de n en la expresion antecedente, y saldrá $\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$; de donde se infiere que el término general de la última serie será $\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} ap^n x^n$.

509 Por el mismo camino se hallaría que el término general de la serie procedente del quebrado $\frac{a}{(1-px)^4} = \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{2 \cdot 3} ap^n x^n$.

Por consiguiente será muy facil de hallar un término determinado de una serie recurrente, por medio de estos términos generales. Propongámonos ha-

hallar el quarto término de la serie que da $\frac{1}{(1-px)^3}$ por medio del término general $\frac{(n+1).(n+2)}{2}$. Consideraremos que por ser en dicho término el exponente de p una unidad menor que 4, será $n=3$, escribiendo 3 por n en el término general, será su coeficiente $\frac{4.5}{2}=10$; si quisiéramos el tercer término, sería $n=2$, y su coeficiente $\frac{3.4}{2}=6$.

510 Lo mismo digo respecto de la serie originada de $\frac{a}{(1-px)^4}$; en el término quinto de esta serie el exponente de p será 4; luego su término general será $\frac{5.6.7}{2.3}=\frac{210}{6}=35$, este será su coeficiente, y el término pedido será $35p^4x^4$.

511 De todo esto inferirémos que el término general de la serie originada de este quebrado $\frac{a}{(1-px)^m}$, tendrá por último factor de su numerador la cantidad $m+n-1$. Porque respecto de $\frac{a}{(1-px)^3}$ este último factor es $n+2=n+3-1$, respecto de $\frac{a}{(1-px)^4}$ es $n+3=n+4-1$; luego respecto de $\frac{a}{(1-px)^m}$ será $n+m-1$.

En quanto al último factor del denominador no tiene dificultad, pues la fórmula para el tercer grado tiene por denominador $2=3-1$, la del quarto grado tiene por último factor del denomidador $3=4-1$; luego el último factor respecto de $(1-px)^m$ será $m-1$.

Si cotejamos el quebrado $\frac{a}{1-p^2x^2}$ con el de an-

antes (404) $\frac{a+bx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$ sacarémos $a=a$, $\alpha=1$, $b=0$, $\beta=0$, $\gamma=-p^2$, de donde sacarémos $A=a$, $B=0$, $C=ap^2$, $D=0$, $E=ap^4$; por consiguiente $\frac{a}{1-p^2x^2}=a\,(1+p^2x^2+p^4x^4+p^6x^6$ &c.$)$, cuyo término general es $ap^{2n}x^{2n}$.

512 Enseñemos ahora como se halla el término general de una serie recurrente, y tambien su suma, en el supuesto de ser conocida la ley con que se ha formado. Aplicarémos el método para sacar el término general de la serie procedente del quebrado $\frac{a+bx+cx^2}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3 \ldots}$.

Resolverémos el denominador $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3$ en sus factores simples, iguales ó desiguales, ó quadrados de esta forma $1-p^2x^2$; transformarémos despues la funcion quebrada compuesta en sus quebrados componentes, y despues buscarémos las series que de ellos proceden, la suma de todos los términos generales será el término general de la serie procedente de la funcion quebrada propuesta.

No tiene esto duda alguna, porque la funcion $\frac{a+bx+cx^2}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3}$ puede resolverse en la serie $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$&c. y tambien en quebrados parciales cuyos términos generales pueden señalarse. Estos quebrados parciales dan las series antes señaladas, cuya suma ha de ser igual con la serie $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$&c. pues así esta, como la suma de todos los quebrados parciales son cada una igual á la funcion quebrada propuesta. Supongamos que las series procedentes de dichos quebrados

dos sean $a'+b'x+c'x^2+d'x^3$, $a''+b''x+c''x^2+d''x^3$, $a'''+b'''x+c'''x^2+d'''x^3$, será patentemente $A=a+a'+a''+a'''$, $B=b+b'+b''+b'''$, $C=c+c'+c''+c'''$ &c. Lo que está manifestando que la suma de los coeficientes de las series parciales es igual con el coeficiente homólogo de la serie $A+Bx+Cx^2+Dx^3$ &c.

513 Busquemos v. gr. el término general de la serie que da esta funcion $\frac{1-x}{1-5x+6x^2}$, cuya serie es $=1+4x+14x^2+46x^3+$&c. Pero $\frac{1-x}{1-5x+6x^2}=\frac{1-x}{(1-2x).(1-3x)}=\frac{-1}{1-2x}+\frac{2}{1-3x}$. Si comparamos el primer quebrado $\frac{-1}{1-2x}$ con $\frac{a}{\alpha+\beta x}$ (403), será $a=-1$, $\alpha=1$, $\beta=-2$, y el término general $\frac{a\beta^n x^n}{\alpha^{n+1}}$ será $=-2^nx^n$. El otro quebrado $\frac{2}{1-3x}$ da $a=2$, $\alpha=1$, $\beta=-3$; luego el término general será $\frac{a\beta^n x^n}{\alpha^{n+1}}=2.3^n x^n$. Sumando estos dos términos generales uno con otro, su suma $2.3^nx^n-2^nx^n=(2.3^n-2^n)x^n$, será el término general de la serie propuesta. Si hiciéramos $n=3$, el término quarto sería $(2.3^3-2^3)x^3=(54-8)x^3=46x^3$.

514 Veamos finalmente como se halla la suma de una serie recurrente, quando se conoce la ley que guarda en su formacion.

La ley que sigue la serie en su formacion está diciendo de quantos términos antecedentes se compo-

pone el coeficiente de cada término suyo, lo que tambien manifiesta muchas veces su término general; porque segun este consta de dos, tres, &c. factores, los coeficientes se forman de dos, tres, &c. términos antecedentes. Ya se sabe que estas series recurrentes proceden de un quebrado el qual es la suma de la serie; luego todo está en hallar el numerador y el denominador de dicho quebrado.

Sea v. gr. la serie $1+3x+4x^2+7x^3+11x^4+$ &c. cuyos coeficientes son cada uno la suma de dos antecedentes; por consiguiente el quebrado igual á la suma de la serie tendrá esta forma $\frac{a+bx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$; y para hallar las tres cantidades α, β, γ, tomarémos las tres equaciones siguientes $C\alpha+\beta B+A\gamma=0$, $D\alpha+C\beta+B\gamma=0$, $E\alpha+D\beta+C\gamma=0$, en las quales las cantidades A, B, C, D son los coeficientes 1, 3, 4, 7, 11 &c. de la serie propuesta; y substituyendo estos números en su lugar en las equaciones de antes, tendrémos $4\alpha+3\beta+\gamma=0$, $7\alpha+4\beta+3\gamma=0$, $11\alpha+7\beta+4\gamma=0$, de las quales sacarémos $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=-1$; pero $A=\frac{a}{\alpha}$, luego $a=A\alpha=1$; finalmente $b=B\alpha+A\beta=3-1=2$. Despues de todas estas determinaciones la suma de la serie ó $\frac{a+bx}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}=\frac{1+2x}{1-x-x^2}$.

Aplicacion de las series á varios asuntos.

515 Las series son de muchísimo uso en toda la Matemática, porque proporcionan y facilitan muchisimos cálculos. Manifestarémos aquí algunas de las aplicaciones que de ellas se hacen en los puntos mas fundamentales, que tenemos por oportuno incluir en este compendio.

Aplicacion de las series á la extraccion de las raices.

516 Aquí hemos de recordar y considerar con algun cuidado la fórmula general (72) para formar una potencia qualquiera de un binomio, esto es, la equacion $(x+a)^m = x^m + mx^{m-1}a + \frac{m.(m-1)}{2}a^2x^{m-2} + \frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3}x^{m-3}a^3 +$ &c. Como x^{m-1} es lo mismo que $\frac{x^m}{x}$, x^{m-2} lo mismo que $\frac{x^m}{x^2}$ &c. es patente que á la fórmula se le puede dar esta forma $(x+a)^m = x^m + \frac{mx^m a}{x} + \frac{m.(m-1)}{2}\frac{x^m a^2}{x^2} + \frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3}\frac{x^m a^3}{x^3} +$ &c.

Considerémos ahora que x^m, primer término de la fórmula, es el primer término del binomio elevado á la potestad m; el segundo $m\frac{ax^m}{x}$, es el primer

mer término de la fórmula, multiplicado por m y por $\frac{a}{x}$, esto es por el segundo término del binomio partido por el primero; el tercero $\frac{m.(m-1)}{2}$ $\frac{x^m a^2}{x^2}$, es el segundo multiplicado por $\frac{(m-1)}{2} . \frac{a^2}{x^2}$; el quarto $\frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3} x^m \frac{a^3}{x^3}$, es el tercero multiplicado por $\frac{(m-2)}{3} \frac{a^3}{x^3}$ &c. Luego si llamamos $x = P$ y $\frac{a}{x} = Q$, será $(P + PQ)^m = P^m + mP^m Q + \frac{m.(m-1)}{2} P^m Q^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3} P^m Q^3 +$ &c. Luego si A representa el primer término P^m, el segundo será mAQ; si B representa el segundo; el tercero será $\frac{m-1}{2} BQ$; si C representa el tercero, el quarto será $\frac{m-2}{3} CQ$ &c. Luego $(P+PQ)^m = \overset{A}{P^m} + \overset{B}{mAQ}$ $+ \overset{C}{\frac{m-1}{2} BQ} + \overset{D}{\frac{m-2}{3} CQ} + \overset{E}{\frac{m-3}{4} DQ} +$ &c.

Se viene á los ojos que esta fórmula es mas sencilla que la otra (72); pues para calcular v. gr. el quinto término E, no hay sino multiplicar por $\frac{m-3}{4} Q$ el quarto término D, el qual ya está calculado.

Siempre que se quiera aplicar esta fórmula algun caso particular, convendrá tener presente que Q es el segundo término del binomio dividido por el primero.

517 Busquemos la quarta potencia de $2a + 3u$;

 aqui

aquí $m = 4$, $P = 2a$, $Q = \frac{3u}{2a}$, $PQ = 3u$; por consiguiente

$$P^m = \qquad 16a^4$$
$$mAQ = 4 \times 16a^4 \times \frac{3u}{2a} = 96a^3u$$
$$\frac{m-1}{2}BQ = \frac{3}{2} \times 96a^3u \times \frac{3u}{2a} = 216a^2u$$
$$\frac{m-2}{3}CQ = \frac{2}{3} \times 216a^2u^2 \times \frac{3u}{2a} = 216au^3$$
$$\frac{m-3}{4}DQ = \frac{1}{4} \times 216au^3 \times \frac{3u}{2a} = 81u$$

Luego $(2a+3u)^4 = 16a^4 + 96a^3u + 216a^2u^2 + 216au^3 + 81u^4$.

518 Si el exponente de la potencia á la qual se ha de elevar el binomio $P+PQ$ fuese fraccionario, ó, lo que es lo propio, si el empeño fuese sacar una raiz qualquiera del tal binomio, la fórmula serviria del mismo modo. Si el asunto fuera elevar v. gr. el binomio á la potestad $\frac{m}{n}$, sería

$$(P+QP)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}\overset{A}{A}Q + \frac{m-n}{2n}\overset{B}{B}Q + \frac{m-2n}{3n}\overset{C}{C}Q + \&c.$$

Pero elevar $P+PQ$ á la potestad $\frac{m}{n}$ es sacar la raiz n de $(P+PQ)^m$ (56), pues $(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(P+PQ)^m}$. Hagamos algunas aplicaciones de esta fórmula.

519 Sabemos (56) que $\sqrt{(rr-xx)} = (rr-xx)^{\frac{1}{2}}$, luego extraer la raiz quadrada de $(rr-xx)$ es levantar esta cantidad á la potestad $\frac{1}{2}$; luego si queremos sacar esta raiz, servirá la fórmula

con

con hacer $P = rr$, $Q = \frac{-xx}{rr}$, $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$; luego $(rr - xx)^{\frac{1}{2}} = r + \frac{1}{2}A \times \frac{-xx}{rr} - \frac{1}{4}B \times \frac{-xx}{rr} - \frac{3}{6}C \times \frac{-xx}{rr} - \frac{5}{8}D \times \frac{-xx}{rr}$ &c. $= r - \frac{xx}{2rr}A + \frac{xx}{4rr}B + \frac{3xx}{6rr}C + \frac{5xx}{8rr}D +$ &c.; esto es, con substituir los valores de A, B, C, &c. $(rr - xx)^{\frac{1}{2}} = r - \frac{xx}{2r} - \frac{x^4}{8r^3} - \frac{x^6}{16r^5} - \frac{5x^8}{128r^7} -$ &c.

. 520 Quando ocurra sacar el valor de una potencia de exponente negativo, será m negativa; y si el exponente fraccionario fuese negativo, el numerador del exponente se supone negativo, y positivo su denominador, porque el exponente $-\frac{m}{n}$, v. gr. significa que se ha de sacar la raiz n de una cantidad cuyo exponente es $-m$.

Mediante esta consideracion sacarémos fácilmente el valor de $\frac{rr}{r+x}$, ó de $rr \times (r+x)^{-1}$.

Aquí $P = r$, $Q = \frac{x}{r}$, $\frac{m}{n} = -1$, ó $m = -1$, $n = 1$. Luego $(r+x)^{-1} = r^{-1} - 1A \times \frac{x}{r} - 1B \times \frac{x}{r} - 1C \times \frac{x}{r} - 1D \times \frac{x}{r}$ &c. $= \frac{1}{r} - \frac{x}{r}A - \frac{x}{r}B - \frac{x}{r}C$ &c. Y $rr(r+x)^{-1} = rr \times \left(\frac{1}{r} - \frac{x}{rr} + \frac{xx}{r^3} - \frac{x^3}{r^4}\right.$ &c.$\left.\right)$ esto es $\frac{rr}{r+x} = r - x + \frac{xx}{r} - \frac{x^3}{r^2} + \frac{x^4}{r^3} +$ &c.

521 ¿Qual es el valor de $\frac{1}{\sqrt{(2rx - xx)}}$?

Como $\frac{1}{\sqrt{(2rx - xx)}} = (2rx - xx)^{-\frac{1}{2}}$, $P = 2rx$, $Q = -\frac{x}{2r}$, $m = -1$, $n = 2$. Luego $(2rx - xx)^{-\frac{1}{2}} = (2rx)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}A \times \frac{-x}{2r} - \frac{3}{4}B \times \frac{-x}{2r} - \frac{5}{6}C \times \frac{-x}{2r} - \frac{7}{8}D \times \frac{-x}{2r}$ &c. $= \frac{1}{\sqrt{2rx}} + \frac{x}{4r}A + \frac{3x}{8r}B + \frac{5x}{12r}C + \frac{7x}{16r}D +$ &c. $= \frac{1}{\sqrt{2rx}} + \frac{x}{4r\sqrt{2rx}} +$

$\frac{3xx}{32rr\sqrt{2rx}}$ &c. $= \frac{1}{\sqrt{2rx}} \times \left(1 + \frac{x}{4r} + \frac{3x^2}{32r^2} + \frac{3.5x^3}{4.8.12r^3} + \frac{3.5.7.x^4}{4.8.12.16r^4} + \text{\&c.}\right)$.

522 ¿Qual es la raiz cúbica de $1-x^3$? Aquí $P=1$, $Q=-x^3$, $m=1$, $n=3$; lo que da $(1-x^3)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}A \times -x^3 - \frac{2}{6}B \times -x^3 - \frac{5}{9}C \times -x^3 - \frac{8}{12}D \times -x^3 - \frac{11}{15}E \times -x^3$ &c. $= 1 - \frac{x^3}{3}A + \frac{x^3}{3}B + \frac{5x^3}{9}C + \frac{2x^3}{3}D + \frac{11x^3}{15}E$ &c. esto es, $\sqrt[3]{(1-x^3)} = 1 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{9} - \frac{x^9}{81} - \frac{10x^{12}}{243} - \frac{22x^{15}}{729}$ &c.

523 Hallar el valor de $\sqrt[5]{(aa-xx)} = (aa-xx)^{\frac{1}{5}}$. Aquí $P=aa$, $Q=\frac{-xx}{aa}$, $m=1$, $n=5$. Luego $(aa-xx)^{\frac{1}{5}} = (aa)^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5}A \times \frac{-xx}{aa} - \frac{4}{10}B \times \frac{-xx}{aa} + \frac{9}{15}C \times \frac{-xx}{aa} - \frac{14}{20}D \times \frac{-xx}{aa}$ &c. $= a^{\frac{2}{5}} - \frac{xx}{5aa}A + \frac{2xx}{5aa}B + \frac{3xx}{5aa}C + \frac{7xx}{10aa}D$ &c. $= a^{\frac{2}{5}} \times \left(1 - \frac{xx}{5aa} - \frac{2x^4}{25a^4} - \frac{6x^6}{125a^6} - \frac{21x^8}{625a^8} \text{ \&c.}\right)$.

524 Sacar por una serie el valor de $(a+x) \times \sqrt[4]{(a-x)}$.

$\sqrt[4]{(a-x)} = (a-x)^{\frac{1}{4}}$. Aquí $P=a$, $Q=\frac{-x}{a}$, $m=1$, $n=4$. Luego $(a-x)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}A \times \frac{-x}{a} - \frac{3}{8}B \times \frac{-x}{a} - \frac{7}{12}C \times \frac{-x}{a}$ &c. $= a^{\frac{1}{4}} - \frac{x}{4a}A + \frac{3x}{8a}B + \frac{7x}{12a}C$ &c. $= a^{\frac{1}{4}} - \frac{x}{4a^{\frac{3}{4}}} - \frac{3x^2}{32a^{\frac{7}{4}}} - \frac{7x^3}{128a^{\frac{11}{4}}}$ &c. Multiplíquese este valor por $a+x$, sal-

saldrá $a^{\frac{5}{4}} - \frac{a^{\frac{1}{4}}x}{4} - \frac{3x^2}{32a^{\frac{3}{4}}} - \frac{7x^3}{128a^{\frac{7}{4}}}$ &c.

$+ a^{\frac{1}{4}}x - \frac{x^2}{4a^{\frac{3}{4}}} - \frac{3x^3}{32a^{\frac{7}{4}}}$ &c.

Luego $(a+x)\times\sqrt[4]{(a-x)} = a^{\frac{5}{4}} + \frac{3a^{\frac{1}{4}}x}{4} - \frac{11x^2}{32a^{\frac{3}{4}}} - \frac{19x^3}{128a^{\frac{7}{4}}}$ &c.
$= \sqrt[4]{a}\left(a + \frac{3}{4}x - \frac{11x^2}{32a} - \frac{19x^3}{128aa} - \&c.\right)$.

Aplicacion de las series á los logaritmos.

525 Dos son las cuestiones fundamentales que en este asunto hemos de resolver. 1.ª *Dado un número, hallar su logaritmo*; 2.ª *Dado un logaritmo, hallar su número.* Pero primero que nos empeñemos en su resolucion, recordarémos alguna de las proposiciones sentadas en el Tomo I. quando tratamos de los logaritmos, sacando de ellas algunas consideraciones conducentes á nuestro empeño.

526 Dexamos dicho que la base logarítmica de un sistéma de logaritmos es aquel número cuyo logaritmo es la unidad; que 10 es la base logarítmica de los logaritmos comunes, y finalmente que el logaritmo de un número es el exponente de aquella potestad de la base, igual á dicho número; 2 v. gr. es el logaritmo de 100, 3 el logaritmo de 1000, porque $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$ &c.

Sea, pues, a la base logarítmica de un sistema, y un número, y $a^x = y$; será x el logaritmo de y. Claro está que el valor de y pende del valor de x, porque si $x = 0$, será $y = a^0 = 1$ (59);

si $x = 1$, será $y = a$; si $x = 2$, será $y = a^2$; si $x = -1$, será $y = a^{-1} = \frac{1}{a}$.

527 Con la letra L se señala el logaritmo de una cantidad; luego $L.ab$ señala el logaritmo del producto ab. Pero este logaritmo se puede señalar de otro modo, porque si tenemos presente que $1 : a :: b : \frac{ab}{1}$, y lo dicho (I. 38) será $L.ab = L.\frac{ab}{1} = La + Lb - L1$; el logaritmo de abc será $La + Lb + Lc - 2L1$, porque abc es el quarto término de esta proporcion $1 : \frac{ab}{1} :: c : \frac{abc}{1 \times 1}$; y finalmente el logaritmo de $abcd$ será $La + Lb + Lc + Ld - 3L.1$. De donde se infiere que *el logaritmo de un producto de quantos factores se quiera, es igual á la suma de los logaritmos de todos los factores, menos el logaritmo de la unidad tomado tantas veces, menos una, quantos son los factores del tal producto.*

528 Luego ya que en toda potestad la raiz es tantas veces factor quantas unidades tiene el exponente, el logaritmo de a^m será $mLa - (m-1)L1 = mLa - mL1 + L1$. El logaritmo de $a^2 = 2La - L1$; $La^3 = 3La - 2L1$, &c.

529 Si el exponente fuese negativo, como aquí a^{-m}, el logaritmo de a^{-m} será $-mLa - (-m-1)L1 = -mLa + mL1 + L1$.

530 La misma regla se aplica á los quebrados, v. gr. á este $\frac{a}{c}$, lo mismo que $1 \times \frac{a}{c}$, pues $c : a :: 1 : \frac{a}{c}$; será, pues, su logaritmo $\frac{a}{c} = L1 + La - Lc$; logaritmo $\frac{b^3}{ac} = L1 + Lb^3 - Lac$; pero $Lb^3 = 3Lb - 2L1$, y $Lac = La + Lc - L1$; luego $L\frac{b^3}{ac} = L1 + 3Lb - 2L1 - La - Lc + L1 = 3Lb - La - Lc$.

531 El logaritmo de qualquier raiz se expresa-

sará con igual facilidad, considerándola como una potencia del exponente fraccionario, $L\sqrt[m]{a} = La^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} La - (\frac{1}{m} - 1) L1 = \frac{1}{m} La - (\frac{1-m}{m}) L1 = \frac{La + (m-1) L1}{m}$. Si $m = 2$, la raiz será $a^{\frac{1}{2}}$ ó $\sqrt[2]{a}$, y su logaritmo será $\frac{La + L1}{2}$; si $m = 3$, $L\sqrt[3]{a}$, ó $La^{\frac{1}{3}}$ será $= \frac{La + 2L1}{3}$ &c.

532 Si el exponente de la raiz imperfecta, ó potencia fraccionaria fuese negativo, qual sería el de esta $\frac{1}{\sqrt[m]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{m}}} = a^{-\frac{1}{m}}$, se podrá hallar igualmente por la regla general la expresion de su logaritmo; porque $La^{-\frac{1}{m}} = -\frac{1}{m} La - (-\frac{1}{m} - 1) L1 = -\frac{1}{m} La - (\frac{-1-m}{m}) L1 = -\frac{1}{m} La + \frac{(m+1)}{m} L1 = -\frac{La + mL1 + L1}{m}$.

533 Las expresiones hasta aquí sacadas de varias cantidades son generales, pues entrando en ellas el logaritmo de la unidad, se verificarian en qualquier sistema; pero para que se verifiquen en el sistema de los logaritmos vulgares ó de las tablas, se ha de suponer cero, y omitir el logaritmo de la unidad, lo que dará una forma mas sencilla á dichas expresiones, y acaba de manifestar la ventaja que el sistema de los logaritmos vulgares lleva á todos los demas sistemas.

534 Aquí cabe una pregunta; es á saber, si los logaritmos de las cantidades negativas son negativos, ó qual es su naturaleza. Es facil la respuesta. Las cantidades negativas solo se diferencian de

de las positivas en que se toman al reves de estas; y como los logaritmos no se refieren á la oposicion ó modo contrario de ser las cantidades unas respecto de otras, sí únicamente á lo que ellas son en sí, el logaritmo de toda cantidad negativa ha de ser el mismo que el de la cantidad positiva igual con ella. Por consiguiente, siempre que se tropiece con alguna expresion que tenga cantidades positivas, y negativas como esta $a^2b-\frac{cd}{e}$, se hará $a^2b=m$, y $\frac{cd}{e}=n$, cuyos logaritmos respectivos son $Lm = 2La+Lb$, y $Ln = Lc+Ld-Le$, por medio de estos logaritmos búsquese el valor de m y n, y despues el de $m-n$, y quedará salvado el tropiezo.

Esto presupuesto, resolvamos las dos cuestiones expresadas.

535 Cuestion 1. *Dado un número, hallar su logaritmo.*

Sea $(1+x)$ el número dado, $(1+z)$ otro número qualquiera; si fuese a la base logarítmica, $a^m = (1+x)$, y $a^n=(1+z)$, será m el logaritmo de $(1+x)$, y n el logaritmo de $(1+z)$ (425). Si levantamos la primer equacion á la potencia n, y la segunda á la potencia m, saldrá $a^{mn}=(1+x)^n = (1+z)^m$, cuya última equacion dá $(1+z)= (1+x)^{\frac{n}{m}}$.

Hagamos ahora log. $(1+x) = Mx+Nx^2+Px^3+Qx^4+$&c. y log. $(1+z) = Mz+Nz^2+Pz^3+Qz^4+$&c. Combinemos estas dos equaciones con la de antes $(1+z)=(1+x)^{\frac{n}{m}}$ para sacar los valores de los coeficientes M, N, P &c. cuyos valores, despues de subs-

substituidos en la primera, darán el valor de logaritmo $(1+x)$, y por consiguiente resuelta la cuestion.

Con el fin de simplificar el cálculo harémos $\frac{n}{m} = r$, y tendrémos r log. $(1+x) =$ log. $(1+z)$, porque los logaritmos de cantidades iguales son tambien iguales; y el logaritmo de una potestad es igual al logaritmo de su raiz multiplicado por el exponente de la misma potestad (I.236). Luego $Mz + Nz^2 + Pz^3 + Qz^4$ &c. $= r(Mx + Nx^2 + Px^3 + Qx^4$ &c.). Saquemos el valor de z por medio de la equacion $(1+z) = (1+x)^r$ elevando á la potencia r el último binomio por lo enseñado (72); de cuya operacion sacarémos con dexar z sola en el primer miembro $z = rx + \frac{r.(r-1)}{2}x^2 + \frac{r.(r-1)(r-2)}{2.3}x^3$ &c. substituyamos este valor de z en la equacion $Mz + Nz^2 +$ &c. $= r(Mx + Nx^2 +$ &c.) dividamos por r, trasladнамos todos los términos á un lado, ordenemos por x, y saldrá

$$0 = \left\{ \begin{array}{llll} Mx & + M\frac{(r-1)}{2}x^2 & + M\frac{(r-1)(r-2)}{2.3}x^3 & + M\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{2.3.4}x^4 \\ & + Nr & Nr(r-1) & + N\frac{r(r-1)(r-2)}{3} \\ & & + Pr^2 & + N\frac{r.(r-1)^2}{4} \quad \&c. \\ & & & + 3P\frac{r^2(r-1)}{2} \\ & & & + Qr^3 \\ -M & -N & -P & -Q \end{array} \right.$$

Para sacar ahora los valores de M, N, &c. practicarémos lo enseñado (380), y sacarémos 1.° $M - M = 0$, que no dá valor alguno á M; 2. $M\frac{(r-1)}{2} + Nr - N = 0$, que da $N = -\frac{1}{2}M$. Substituido este va-

valor de N en el coeficiente del término de la equacion ó serie que lleva x^3, saldrá $P = \frac{1}{3}M$; la quarta columna dará $Q = -\frac{1}{4}M$; prosiguiendo la operacion se sacaría $R = \frac{1}{5}M$, &c. Finalmente, despues de substituidos estos valores en la equacion $\log.(1+x) = Mx + Nx^2 + Px^3 +$&c. sale

$$\text{Log.}(1+x) = M(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \text{\&c.}).$$

536 Esta expresion del logaritmo de $(1+x)$ da motivo á dos consideraciones de la mayor importancia. 1.ª conforme varíe la cantidad M, variará tambien el logaritmo del número, el qual por lo mismo puede tener una infinidad de logaritmos diferentes: esta es la razon por que á M se le da el nombre de *módulo*; siendo, conforme se viene á la vista, el sistema de logaritmos mas sencillo aquel cuyo módulo $M = 1$. Los logaritmos de este sistema se llaman naturales, y tambien hyperbólicos por la razon que á su tiempo darémos.

537 2.ª Si en la serie que expresa el logaritmo de $(1+x)$ hacemos $x = 0$, tendrémos $\log. 1 = 0$, sea el que fuere el valor de M; luego en todos los sistemas de logaritmos el logaritmo de la unidad es cero.

538 Llamemos I el logaritmo hyperbólico de un número, y S la suma de la serie $(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ &c.) será $I = S$. Llamemos T el logaritmo del mismo número en otro sistema cuyo módulo es M; será $T = MS = MI$. Luego *para sacar el logaritmo de un número en un sistema qualquiera, se ha de multiplicar su logaritmo hyperbólico por el módulo del sistema propuesto.*

539 De $MI = T$ sale $I = \frac{T}{M}$. Luego, *dado el logaritmo de un número en un sistema qualquiera, se sacará su logaritmo hyperbólico partiendo el logaritmo dado por el módulo del sistema.*

No

540 No se percibe al pronto como la serie hallada (135) puede dar el logaritmo de un número; porque si bien la serie es convergente siempre que se toma $x < 1$, ó $= 1$, luego que se le da mayor valor, aunque no llegue á ser doblado, la serie es muy divergente. Vamos á remediar este inconveniente, con cuya mira harémos, para hallar el logaritmo de $(1-x)$ las mismas operaciones hechas poco ha para hallar el logaritmo de $(1+x)$, y saldrá

$$\text{Log.}\ (1-x) = M(-x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4\ \&c.$$

Restémos ahora esta equacion de la primera (135), teniendo presente que $\log.(1+x) - \log.(1-x) = \log.\frac{1+x}{1-x}$ (I.237) y sacarémos

541 $$\text{Log.}\ \frac{1+x}{1-x} = 2M(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7\ \&c.)$$

542 Esta equacion es la que nos dará el logaritmo hiperbólico de todo número mayor que la unidad; porque sea el que fuese dicho número, le harémos igual con $\frac{1+x}{1-x}$, de cuya equacion siempre se sacará para x un valor menor que la unidad, con lo que saldrá muy convergente la serie, y quedará remediado el inconveniente poco ha tocado. Manifestémos la utilidad de este ingenioso recurso, buscando el logaritmo hiperbólico de 2. Hagamos, pues, $2 = \frac{1+x}{1-x}$, cuya equacion da $x = \frac{1}{3}$; y como en el sistema de los logaritmos hiperbólicos $M = 1$, con substituir $\frac{1}{3}$ en lugar de x en la equacion (441), sacarémos

$$\text{Log.}\ 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \&c.\right)$$

cuya serie es mucho mas convergente, segun se ve, que no la serie (435), aun quando se haga en aquella $x = 1$.

Los términos de la serie se sumarán en la siguiente forma.

$\frac{1}{3}$ . . . . $= 0,3333333$

$\frac{1}{3.3^3} = \frac{1}{3.27}$ . . . . $= 0,0123455$

$\frac{1}{5.3^5} = \frac{1}{5.243}$ . . . . $= 0,0008230$

$\frac{1}{7.3^7} = \frac{1}{7.2187}$ . . . . $= 0,0000653$

$\frac{1}{9.3^9} = \frac{1}{9.19683}$ . . . . $= 0,0000056$

Suma . . . . $= 0,3465727$

Cuyo duplo $=$ log. 2 . . . . $= 0,6931458$

543 Cuestion 2. *Dado un logaritmo, hallar su número.*

Sea $M(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \&c.)$ el logaritmo dado, y $(1+x)$ su número, de modo que $M(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \&c.) = \log.(1+x)$; partámoslo todo por M, saldrá $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \&c. = \frac{\log.(1+x)}{M}$, con lo que la serie será el logaritmo hiperbólico, y hagamos, para abreviar, $y = \frac{\log.(1+x)}{M} = (x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \&c.)$; el trabajo estará en sacar el valor de x en y por el método propuesto.

Para conseguirlo hago $x = Ay + By^2 + Cy^3 + \&c.$ de donde saco

$$y \left\{ \begin{array}{r} Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \&c. \\ -\frac{1}{2}A^2 - AB - \frac{1}{2}B^2 + \&c. \\ -AC + \&c. \\ +\frac{1}{3}AB + A^2B + \&c. \\ -\frac{1}{4}A^4 + \&c. \end{array} \right.$$

despues de trasladar y al segundo miembro, y suponer iguales con cero todos los coeficientes, saco $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{6}$, $D = \frac{1}{24}$ &c. Luego $x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2.3} + \frac{y^4}{2.3.4} + \frac{y^5}{2.3.4.5} + \&c.$ Luego con añadir 1 á cada miembro, el número

ó

ó $(1+x) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2.3} + \frac{y^4}{2.3.4} + \&c.$ y como hemos hecho y igual al número partido por el módulo, ó $y = \frac{\log.(1+x)}{M}$, será tambien respecto de todo número n en general $y = \frac{\log. n}{M}$, haciendo, pues, las correspondientes substituciones, se verificará en general respecto de todo número n,

$$n = 1 + \left(\frac{\log. n}{M}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\log. n}{M}\right)^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{\log. n}{M}\right)^3 + \frac{1}{1.3.4}\left(\frac{\log. n}{M}\right)^4 + \&c.$$

544 De esta serie inferirémos el valor de la base del sistema de los logaritmos naturales. Porque como la base del sistema es el número cuyo logaritmo $= 1$, y en el sistema de los logaritmos naturales $M = 1$, hechas que estén en la equacion poco ha sacada (443) las substituciones correspondientes, sale . . .

$$n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \&c. \;.\;.$$

lo que, despues de hecho el cálculo, conforme se hizo antes (442), da $n = 2,718281828459$ &c. cuyo número es de suma utilidad en el cálculo integral.

Aplicacion de las series á la resolucion de las equaciones numéricas.

545 Una de las operaciones mas frecuentes del Álgebra es resolver equaciones, acerca de lo qual dexamos dicho lo bastante respecto de las equaciones de primero y segundo grado. Ahora enseñarémos como por series se sacan las raices de las equaciones numéricas determinadas, esto es, de las equaciones que no tienen mas que una incógnita, ni sus términos otros coeficientes que cantidades numéricas. Pero para nuestro asunto, y otros que mas adelante se tocarán, conviene que manifestemos la formacion y algunas circunstancias de las equaciones,

nes, cuyo conocimiento da muchísima luz para su resolucion.

Formacion y propiedades de las equaciones.

546 Toda equacion completa se considera como compuesta de tantas equaciones simples ó lineares, quantas unidades tiene el exponente de la mayor potencia de su incógnita. Supongamos v. gr. $x=a$, $x=b$, $x=c$; será $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$; el producto de todas estas equaciones multiplicadas unas por otras, esto es $(x-a)\times(x-b)\times(x-c)=0$, dará la siguiente equacion cúbica, ó de tercer grado.

$$\begin{array}{l} x^3-ax^2+abx-abc=0 \\ \quad\;\; -bx^2+acx \\ \quad\;\; -cx^2+bcx \end{array}$$

cuyas raices, ó los valores de x son a, b, c.

Asimismo $(x-a).(x-b).(x-c).(x-d)=0$ da la equacion biquadrática ó de quarto grado

$$\begin{array}{l} +x^4-ax^3+abx^2-abcx+abcd=0 \\ \quad\;\; -bx^3+ac \quad -abd \\ \quad\;\; -cx^3+bc \quad -acd \\ \quad\;\; -dx^3+da \quad -bcd \\ \quad\quad\quad +db \\ \quad\quad\quad +dc \end{array}$$

cuyas raices son a, b, c, d.

547 Las dos equaciones que acabamos de sacar se pueden escribir como sigue

$$x^3-px^2+qx+r=0$$
$$x^4-px^3+qx^2+rx+s=0 \ (208).$$

Resolver qualquiera de ellas es hallar las equaciones simples de que se compone, y averiguar por este camino las raices a, b, c &c. porque cada una de dichas equaciones lineares da un valor de x, ó una raiz. Una vez hallado uno de estos valores de x,

si

si se le substituye en la equacion compuesta en lugar de la incógnita, todos los términos de esta se desaparecerán, reduciéndose todos ellos á cero.

Porque como $(x-a) \times (x-b)$ &c. $= 0$, es evidente que quando uno de estos factores sea $= 0$, y lo será el primero v. gr. si en lugar de x se pone a, pues será $a-a = 0$, todo el producto será $= 0$. Por consiguiente la equacion cúbica tiene tres raices, la biquadrática quatro; en general, *toda equacion tiene tantas raices, quantas unidades el exponente de la mayor potencia de su incógnita, y no tiene mas.*

548 Quando las raices a, b, c, &c. son todas iguales, la equacion de tercer grado es un cubo $(x-a)^3 = 0$; la de quarto grado es una quarta potencia $(x-a)^4 = 0$, y la raiz se halla por extraccion, por ser la equacion un binomio elevado á una potencia.

549 Hemos dicho que ninguna equacion tiene mas raices, que unidades el exponente de la mayor potencia de su incógnita, en lo que no puede haber duda. Porque si en lugar de x se substituye otra cantidad v. gr. f que no sea igual ni con a, ni con b, ni con c &c.; como ni $f-a$, ni $f-b$, ni $f-c$ &c. es $= 0$, tampoco el producto de unas por otras se desaparecerá, ni será $= 0$; será forzosamente algun producto real, y por lo mismo f no será raiz de la equacion.

550 Por ser imposible la raiz quadrada de una cantidad negativa (61), de una equacion de esta forma $xx+aa = 0$, ó $xx = -aa$, sale $x = \pm\sqrt{(-aa)}$, que incluye las dos raices imposibles de la equacion. Por lo que, una equacion quadrada tiene imaginarias sus dos raices, ó no tiene ninguna. Luego en toda equacion las raices imaginarias, si las tiene, son pares, pues la equacion quadrada, una de las

que la componen, tiene ambas imaginarias las suyas, ó no tiene ninguna. Por consiguiente, en ninguna equacion pueden ser nones las raices imposibles; luego toda equacion cúbica tiene tres raices reales ó una sola; la equacion biquadrática tendrá quatro raices reales, dos, ó ninguna &c.

551 De las equaciones propuestas (446) se echa de ver que el coeficiente del primer término, aquel donde está la mas alta potencia de la incógnita, es 1; el coeficiente del segundo término, aquel donde está la potencia inmediatamente menor de la incógnita, es la suma de todas las raices, a, b, c &c. mudados sus signos; el coeficiente del tercer término es la suma de los productos de las raices de dos en dos; el coeficiente del quarto término, la suma del producto de todas las raices de tres en tres, mudados sus signos; el último término, ó el término absoluto, el término conocido, aquel donde no está la incógnita, es el producto de todas las raices. Los términos nones tienen todos un mismo signo, y los términos pares todos el signo contrario.

552 Síguese de aquí que quando la suma de todas las raices positivas es igual á la suma de todas las negativas, el segundo término de la equacion falta; si la suma de los productos negativos de las raices de dos en dos es igual á la suma de los productos positivos, la equacion carecerá de tercer término &c.

553 Todo lo dicho hasta aquí se verifica, ora lleven las raices el signo $+$, ora lleven el signo $-$. Porque supongamos que una de ellas, v. gr. c mude de signo, por manera que sea $-c$ y $x+c=0$; el coeficiente del segundo término de la equacion cúbica será $-a-b+c$, esto es, la suma de las raices, mudados los signos de todas; el coeficiente del tercer-

cer

cer término será $ab-ac-bc$, esto es, la suma de los productos de todas las raices de dos en dos; lo propio digo respectivamente de los demas.

554 De lo dicho hasta aquí se sigue que en toda equacion libre de quebrados y radicales, cada una de sus raices, cada uno de sus productos de dos en dos, de tres en tres, &c. son divisores cabales del último término, ó del número absoluto. Luego quando estos divisores no se pueden sacar, es señal evidente de no haber ni raices, ni productos suyos de dos en dos, de tres en tres, &c. y que hay radicales. Porque no hay duda que en una equacion cúbica v. gr. a, b, c, y ab, ac, bc son todos divisores del último término abc; lo mismo se verifica en las equaciones mas altas.

555 En todas las equaciones cúbicas y biquadráticas, quando las raices son todas positivas, los signos de los términos son alternadamente + y —; por manera que hay tantas mudanzas de signo, quantas son las raices, ó las unidades de su grado; quando las raices son negativas, los signos de los términos son todos + sin mudanza alguna. De lo qual se deduce que en estos casos hay tantas raices positivas, quantas mudanzas de signo en todos los términos, de + en —, y de — en +. Esta regla es general; quiero decir, que en toda equacion hay tantas raices positivas, quantas mudanzas de signo. Esto supone que á la equacion no le falta término alguno, y son numéricos todos sus coeficientes. Por este medio se sabe quantas raices negativas tiene, porque son tantas, quantas veces hay dos signos + ó dos signos — inmediatos uno á otro. Esta regla sale fallida siempre que la equacion tiene raices imaginarias; y los principiantes podrán comprobarla en tal qual caso particular.

556 Dexamos dicho (445) que quando las rai-

ces son todas positivas, los términos de la equacion llevan alternadamente desde el principio al fin los signos + y —; que quando las raices son todas negativas, los coeficientes de todos los términos llevan el signo +. Luego ya que con mudar los signos de las raices, se mudan los signos de los términos alternados, tambien se mudan los signos de las raices, con mudar los signos de los términos alternados. En esto no hay falencia, como lo verificará qualquiera que forme dos equaciones con unas mismas raices dándoles signos contrarios.

557 Una vez que toda equacion compuesta, esta v. gr. $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ se compone de equaciones simples de esta forma $x - a = 0$, $x - b = 0$ &c. toda la equacion se podrá dividir cabal por $x - a$, mediante lo qual se la reducirá á menor dimension. Por el mismo principio, una vez sacadas todas las raices a, b, c &c. de una equacion, executando la multiplicacion de $(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-c)$ &c. se restituirá la equacion propuesta. No es de estrañar que una equacion tenga muchas raices; porque las mas de las cuestiones tienen mas de una solucion, siendo en unos casos $x = a$, en otro $x = b$, en otro $x = c$ &c. cuyos casos todos están cifrados en la equacion general. Síguese de aquí que aunque toda equacion tiene muchas raices, sola una corresponde á una cuestion ó caso particular.

558 Ahora probarémos que con substituir en una equacion una de sus raices en lugar de x, todos sus términos se desaparecen. Sea v. gr. la equacion

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 &+ abx - abc = 0 \\ -bx^2 &+ acx \\ -cx^2 &+ bcx \end{aligned}$$

cuyas raices son, como antes, a, b, c. Si en lugar de x substituimos una de ellas, v. gr. a, la equacion

cion se transformará en

$$\begin{array}{l} a^3 - a^3 + ba^2 - abc = 0. \\ \quad - ba^2 + ca^2 \\ \quad - ca^2 + abc \end{array}$$

cuyos términos se destruyen unos á otros; y lo propio sucederá si en lugar de x se substituye b ó c.

559 Si el último término abc de la equacion faltare, no podrá menos de haber una raiz $=0$, en cuyo caso x estará en todos los términos restantes; luego toda la equacion podrá dividirse por x, ó por $x-0$, con lo que baxará un grado. Si faltasen dos términos, esto es, abx, acx, bcx y abc, habrá dos raices $=0$; si faltasen tres términos, habrá tres raices iguales á cero, &c.

Y por el contrario, si una, dos, tres &c. raices fuesen $=0$, el último término, los dos últimos &c. faltarán en la equacion, y en lo que de ella quedare, estarán sus demas raices. Si en la equacion de antes (458) b, c; son $=0$, no quedará de la equacion mas que $x^3 - ax^2 = 0$ ó $x-a = 0$, partiendo todo por x^2, en cuya cantidad está la otra raiz a.

560 Finalmente, equaciones imaginarias son todas aquellas cuyas raices son imaginarias; tal es esta equacion $x^4 - 4x^3 + xx + 10x + 22 = 0$, la qual es el producto de estas dos $xx + 2x + 2 = 0$, y $xx - 6x + 11 = 0$, siendo la primera de estas el producto de $(x+1+\sqrt{-1})$ por $(x+1-\sqrt{-1})$; y la otra el producto de $(x-3+\sqrt{-2})$ por $(x-3-\sqrt{-2})$.

Resolucion de las equaciones compuestas numéricas.

561 El método que vamos á declarar para esta resolucion sirve particularmente para los casos en que el valor de la incógnita no se puede sacar cabal, por cuyo motivo es preciso saber primero á

que número se acerca mas; lo que se conoce, ó por la naturaleza de la cuestion de la qual se deriva la equacion propuesta, ó con substituir en esta diferentes números en lugar de la incógnita. Hay dos modos de hacer estas substituciones, los quales en sustancia se reducen á uno mismo.

1.° Se pasa al segundo miembro de la equacion su término absoluto; despues se substituyen en el primer miembro diferentes números en lugar de la incógnita, con lo que sus términos se convierten en cantidades numéricas, cuya suma ó diferencia, quando las hay de signos contrarios, es menor ó mayor que el número del segundo miembro. El número cuya substitucion en lugar de la incógnita da para el primer miembro un resultado menor que el segundo miembro, es menor que la raiz; el número cuya substitucion en lugar de la incógnita da para el primer miembro un resultado mayor que el segundo miembro, es mayor que la raiz. Es, pues, el valor de la raiz un número entre los dos substituidos, los quales se llaman *los límites* de la raiz. En este caso toda la dificultad está en hallar la cantidad que se ha de añadir al menor de los dos límites, para sacar tan cabal como se pueda la raiz.

2.° Se substituyen en la equacion diferentes números hasta executar dos substituciones consecutivas que den dos resultados de signo contrario; en sacándolos, es señal de que los dos números que las han dado son los límites de la incógnita.

562 Quiero saber quales son límites del valor de x en la equacion $x^2-x-5=0$. Para aplicar el primer método hago $x^2-x=5$; con substituir 2 en lugar de x, sale $4-2=2$, menor que 5; substituyo 3, y sale $9-3=6$, mayor que 5; luego 2 y 3 son los límites de la raiz.

Para hacer la misma averiguacion en la equacion

x^3

$x^3+36x^2+432x-2772=0$, traslado el término absoluto al segundo miembro, y sale $x^3+36x^2+432x=2772$ la substitucion de 4 en lugar de x, da $64+576+1628=2268$, menor que 2772; la substitucion de 5 da $125+900+2160=3185$, mayor que 2772. Luego 4 y 5 son los límites de la raiz.

563 Para averiguar lo propio por el segundo método, dexo la primer equacion como se está $x^2-x-5=0$. La substitucion de 2 da $4-2-5=-3$, la substitucion de 3 da $9-3-5=+1$. Luego la raiz está entre 2 y 3.

Dexando la segunda equacion en esta forma $x^3+36x^2+432x-2772=0$, la substitucion de 4 da $64+576+1628-2772=-504$; la substitucion de 5 da $125+900+2160-2772=+413$; luego x está entre 4 y 5.

Para sacar, pues, aproxîmado el valor de x en las dos equaciones propuestas, hay que hallar lo que se ha de añadir á 2 respecto de la primera, y lo que se ha de añadir á 4 respecto de la segunda.

Este es el objeto del método de resolucion que estoy proponiendo, para cuya inteligencia bueno será, antes de proponerle con la generalidad que cabe, aplicarle á dos casos particulares.

564 Busquemos que valor tiene x en esta equacion

$$x^2=50.$$

Aquí se echa de ver desde luego que x es mayor que 7, porque el quadrado de 7 no pasa de 49; tambien se echa de ver que x es menor que 8, porque el quadrado de 8 es 64; luego x está entre 7 y 8. Llamo z lo que he de añadir á 7, y será $x=7+z$; substituyo por x en $x^2=50$ la cantidad $7+z$, y sale $49+14z+z^2=50$, ó $-1+14z+z^2=0$. La equacion puesta en estos términos se llama *equacion preparada*. Multiplico esta equacion por la serie $+Az+Bz^2+Cz^3+$&c. ó, lo que basta para el inten-

tento, por sus tres primeros términos

$$\begin{array}{l} -1+14z+z^2=0 \\ 1+Az+Bz^2 \end{array}$$

$$\text{y sale } \left.\begin{array}{l} -1+14z+z^2 \\ \quad -Az+14Az^2+Az^3 \\ \qquad -Bz^2 \quad +14Bz^3+Bz^4 \end{array}\right\}=0$$

Como z es una cantidad fraccionaria muy pequeña, los términos del producto serán tanto menores (376) quanto mayor exponente lleve en ellos z; luego se podrán desechar sin rezelo de error sustancial, y nos bastarán los primeros términos de la equacion producto.

Hecha esta advertencia, igualo con cero (379) los coeficientes del tercero y quarto término del producto, lo que da $1+14A-B=0$, $A+14B=0$. De estas equaciones, saco $A=-\frac{14}{197}$, $B=-\frac{A}{14}=\frac{1}{197}$. Substituyendo ahora estos valores en el producto, su tercer término se desaparecerá, y quedará todo él reducido (desechando tambien el quinto por despreciable), á lo que se sigue $-1+\left(14+\frac{14}{197}\right)\times z=0$; luego $-197+2772\times z=0$, y $z=\frac{197}{2772}=0{,}0710678$, próxîmamente.

Si la equacion preparada se hubiese multiplicado por mas términos de la serie $1+Az+$&c. el valor de z se hubiera sacado mas aproxîmado á proporcion.

565 Sea la equacion preparada

$$-2+5z-z^3=0.$$

La multiplicarémos por quatro términos de la serie $1+Az+Bz^2+$&c.

$$\begin{array}{l} -2+5z-z^3=0 \\ 1+Az+Bz^2+Cz^3+\&c. \end{array}$$

$$\text{sale} \left.\begin{array}{l} -2-2Az-2Bz^2-2Cz^3 \\ +5z \quad +5Az^2+5Bz^3+5Cz^4 \\ \qquad\qquad -z^3 \quad -Az^4 \end{array}\right\}=0$$

cuyos términos tercero, quarto y quinto dan $2B=5A$, $2C=5B-1$, $5C=A$.

Luego $25B-5=10C=2A$; pero por la primera de estas equaciones $B=\frac{5A}{2}$; luego $\frac{125A}{2}-5=2A$, y por consiguiente $A=\frac{10}{121}$. Si en lugar de A substituyo este valor suyo en la equacion producto, desechando los términos donde z pasa de la primer potencia, quedará reducida á $-2+\left(5-\frac{20}{121}\right)\times z=0$.

Luego $z=\frac{242}{585}=0,414$, próxîmamente. Con la luz que dan estos dos casos se entenderá mejor el método, el qual se reduce á lo siguiente.

566 Búsquese primero entre que números está el valor de la incógnita ó la raiz, á la qual llamarémos r; llámese z la diferencia que va de r al valor verdadero de x, y será $x=r\pm z$; substitúyase en la equacion $r\pm z$ en lugar de x, la qual despues de esta substitucion será la equacion preparada. Multiplíquesela por quantos términos se quiera de la serie $1+Az+Bz^2+\&c.$ en la inteligencia que quantos mas términos se multipliquen de la serie $az+bz$ &c. tanto mas aproxîmado se sacará el valor de z. Quando se multiplican dos términos no mas de la serie, la aproxîmacion se llama de segundo grado; si se multiplican tres, la aproxîmacion se llama de tercer grado. En la equacion producto quedan destruidos tantos términos menos

nos uno, quantos términos se toman de la serie multiplicador; desechándose, por ser z un quebrado de poca monta, los términos donde z lleva potencias que pasan del primer grado; mediante lo qual, queda reducida la equacion preparada, por compuesta que sea á una equacion de primer grado, de la qual se saca el valor de z.

Todo esto presupuesto, sea la equacion preparada la siguiente

$$-p+az+bz^2+cz^3+dz^4+\&c.=0,$$

multiplico por $1+Az$ sus dos primeros términos no mas, y sale

$$\left.\begin{array}{l} -p+\ az\ \ +bz^2\ \ +\&c. \\ \quad -pAz+aAz^2+\&c. \end{array}\right\}=0.$$

Hago $b+aA=0$, y saco $A=-\frac{b}{a}$; substituyo este valor de A en el segundo término de la equacion producto, con lo que sus dos primeros términos son $-p+(a-Ap\times z)=0$, que dan $z=\frac{p}{a-Ap}$ se convierten en $-p+\left(a+\frac{bp}{a}\right)\times z$, de donde sale $z=\dfrac{p}{a+\frac{bp}{a}}=\frac{ap}{aa+bp}$. Esta es, por lo dicho (466) una aproxîmacion de segundo grado.

567 Para sacar una aproxîmacion de tercer grado; multiplicarémos tres términos de la serie $az+bz^2$ &c. por los tres primeros términos $1+Az+Bz^2$ de la serie, y tendrémos

$$\left.\begin{array}{l} -p+\ az\ \ +bz^2\ +\ cz^3\ \ \&c. \\ \quad -Apz+Aaz^2+Abz^3\ \ \&c. \\ \qquad\qquad -Bpz^2+Baz^3\ \ \&c. \end{array}\right\}=0.$$

Los coeficientes del tercer y quarto término dan $b+Aa-Bp=0$, $c+Ab+Ba=0$. Si multiplico la primera de estas dos equaciones por a, la segunda por p, y las sumo despues una con otra, saco ab

+

$+Aa^2+pc+Abp=0$, y por consiguiente $A= -\frac{ab+cp}{aa+bp}$. Luego será $z=\frac{p}{a-pA}$, con substituir aquí el valor hallado de A.

568 Para hacer una aproxîmacion de quarto grado, multiplicaré quatro términos de la serie $az+bz^2$ &c. por quatro términos de la serie $1+Az+Bz^2+Cz^3+$ &c., mediante lo qual la equacion producto será

$$\left.\begin{array}{r} -p+az+bz^2+cz^3+dz^4 \text{ \&c.} \\ -Apz+Aaz^2+Abz^3+Acz^4 \text{ \&c.} \\ -Bpz^2+Baz^3+Bbz^4 \text{ \&c.} \\ -Cpz^3+Caz^4 \text{ \&c.} \end{array}\right\}=0,$$

de donde se saca

$B=\frac{Aa}{p}+\frac{b}{p}$

$C=\frac{Ba}{p}+\frac{Ab}{p}+\frac{c}{p}$

$Ca+Bb+Ac+d=0$, y substituyendo en esta en lugar de C su valor, sale

$\frac{Ba}{p}+\frac{Ab}{p}+\frac{c}{p}+\frac{Bb}{a}+\frac{Ac}{a}+\frac{d}{a}=0$, ó $\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{a}\right)\times B+\left(\frac{b}{p}+\frac{c}{a}\right)\times A+\frac{c}{p}+\frac{d}{a}=0$; y substituyendo en esta el valor de B, sale $\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{a}\right)\times\left(\frac{Aa}{p}+\frac{b}{p}\right)+\left(\frac{b}{p}+\frac{c}{a}\right)\times A+\frac{c}{p}+\frac{d}{a}=0$; esto es, $\left(\frac{aa}{pp}+\frac{2b}{p}+\frac{c}{a}\right)\times A+\frac{ab}{pp}+\frac{bb}{ap}+\frac{c}{p}+\frac{d}{a}=0$; multiplicándolo todo por app, sale

$(a^3+2abp+cpp)\times A+a^2b+b^2p+acp+dp^2=0$, y por último $A=-\frac{aab+(ac+bb)\times p+dpp}{a^3+2abp+cpp}$, con lo que ya se puede sacar $z=\frac{p}{a-Ap}$.

569 Por el mismo camino se hallarian las aproxîmaciones superiores, multiplicando los términos que

que se quiera de la serie $az+bz^2$ &c. Sin embargo hay un modo mas breve de sacarlas, reparando la ley que guardan los valores de los coeficientes A, B, C &c. y haciendo acerca de ellos algunas consideraciones de suma utilidad. Porque de lo practicado hasta aquí se evidencia que

$$B = \frac{Aa}{p} + \frac{b}{p}$$
$$C = \frac{Ba}{p} + \frac{Ab}{p} + \frac{c}{p}$$
$$D = \frac{Ca}{p} + \frac{Bb}{p} + \frac{Ac}{p} + \frac{d}{p}$$
$$E = \frac{Da}{p} + \frac{Cb}{p} + \frac{Bc}{p} + \frac{Ad}{p} + \frac{e}{p}.$$

570 Por consiguiente, si hacemos

$$Q = \frac{a}{p}$$
$$R = \frac{aQ+b}{p}$$
$$S = \frac{aR+bQ+c}{p}$$
$$T = \frac{aS+bR+cQ+d}{p}$$
$$V = \frac{aT+bS+cR+dQ+e}{p}$$

y

$$q = \frac{b}{p}$$
$$r = \frac{aq+c}{p}$$
$$s = \frac{ar+bq+d}{p}$$
$$t = \frac{as+br+cq+e}{p}$$
$$v = \frac{at+bs+cr+dq+f}{p}$$

&c.

el valor de A se sacará partiendo una de las cantidades q, r, s, &c. por su correspondiente Q, R, S, &c. mudando el signo del cociente; por manera que $A = -\frac{q}{Q}$, $-\frac{r}{R}$, $-\frac{s}{S}$, &c. y por consi-

siguiente $z = \frac{p}{a+p\times\frac{q}{Q}}, \frac{p}{a+p\times\frac{r}{R}}, \frac{p}{a+p\times\frac{s}{S}}$, &c.

ó $z = \frac{1}{\frac{a}{p}+\frac{q}{Q}}, \frac{1}{\frac{a}{p}+\frac{r}{R}}, \frac{1}{\frac{a}{p}+\frac{s}{S}}$, &c.,

de cuyos valores, cada uno es, segun se ve, mas cabal que ninguno de los antecedentes.

571 Estas equaciones se derivan facilmente de las de antes, que expresan las relaciones de las cantidades A, B, C, &c. Porque si en lugar de Q y q se substituyen sus iguales, en la primera de aquellas equaciones, $B = \frac{Aa}{p} + \frac{b}{p}$, será $B = QA+q$, cuyo valor de B substituido en la segunda equacion $C = \frac{Ba}{p} + \frac{Ab}{p} + \frac{c}{p}$ da $C = \frac{aQA}{p} + \frac{aq}{p} + \frac{Ab}{p} + \frac{c}{p} = RA+r$, despues de substituir R y r en lugar de sus iguales. Y si en la tercer equacion se substituyen en lugar de B y C sus valores, saldrá

$D = \frac{aRA}{p} + \frac{ra}{p} + \frac{bQA}{p} + \frac{bq}{p} + \frac{Ac}{p} + \frac{d}{p} = SA+s.$

Del mismo modo se sacará $E = TA+t$, $F = VA+v$ &c. cuyos valores igualándolos succesivamente con cero, dan $-\frac{q}{Q}$, $-\frac{r}{R}$, $-\frac{s}{S}$ para los diferentes valores aproxîmados de A; substituyendo finalmente el valor de A en $z = \frac{p}{a-Ap}$, se saca el valor de z.

572 Apliquemos el método á algunos exemplos.

Sea $x^3 = 10$.

Como aquí x es mayor que 2 y menor que 3, pues el cubo de 2 es 8, y el cubo de 3 es 27, hago $x = 2+z$, y despues de substituido en la propuesta $2+z$

en

en lugar de x, sale la equacion preparada $-2+12z+6z^2+z^3=0$, compárola con la equacion general

$$-p+az+bz^2+cz^3+dz^4+\&c.=0,$$

y saco $p=2$, $a=12$, $b=6$, $c=1$, $d=0$; y haciendo las substituciones correspondientes en la primera aproxîmacion (466), sale $-A=\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$; luego $z=\frac{p}{a-Ap}=\frac{2}{13}=0,1538$.

573 Si quiero la segunda aproxîmacion, haré las correspondientes substituciones en $-A=\frac{ab+cp}{aa+bp}$ (467), y sacaré $-A=\frac{72+2}{144+12}=\frac{37}{78}$, y por lo mismo $z=\frac{p}{a-Ap}=\frac{78}{505}=0,15445$.

574 Para aplicar la tercera aproxîmacion haré las debidas substituciones en (468) $-A=\ldots\ldots$ $\frac{a^2b+(ac+bb)\times p+dp^2}{a^3+2abp+cpp}=\frac{144\times 6+96}{144\times 12+144\times 2-4}=\frac{36\times 6+24}{36\times 14+1}=\frac{48}{101}$, y el correspondiente valor de z será $=\frac{101}{654}=0,154434$.

575 Lo mismo sacarémos por la solucion general (470 y 471); porque siendo aquí $p=2$, $a=12$, $b=6$, $c=1$, $d=0$, será

$$Q=\frac{a}{p}=6$$

$$R=\frac{aQ+b}{p}=\frac{12\times 6+6}{2}=39$$

$$S=\frac{aR+bQ+c}{p}=\frac{505}{2}$$

&c.

será igualmente

$$q=\frac{b}{p}=3$$

$$r=\frac{aq+c}{p}=\frac{37}{2}$$

$$s=\frac{ar+bq+d}{p}=120.$$

Por consiguiente

$\frac{q}{Q}=\frac{1}{2}$, $\frac{r}{R}=\frac{37}{78}$, $\frac{s}{S}=\frac{240}{505}=\frac{48}{101}$; y por lo

lo mismo $\frac{1}{\frac{a}{p}+\frac{q}{Q}}=\frac{1}{6+\frac{1}{2}}=\frac{2}{13}$, como antes.

576 Sirva de segundo exemplo la equacion

$$-2+10z-z^3=0.$$

Aquí $p=2$, $a=10$, $b=0$, $c=-1$, $d=0$ &c. haciendo las debidas substituciones en la aproxîmacion (468) de quarto grado $A=-\frac{aab+(ac+bb)\times p+dpp}{a^3+2abp+cpp}$ sacarémos $-A=\frac{-20}{1000-4}=\frac{-5}{249}$; y por consiguiente $z=\frac{p}{a-Ap}=\frac{249}{1240}=0{,}2008045$, valor verdadero hasta la última figura.

577 Sirva de tercer exemplo la equacion

$$x^3+36x^2+432x=2272,$$

ya sabemos (463) que x es mayor que 4 y menor que 5; harémos, pues, $4+z=x$, lo que, despues de executada en la debida substitucion, da la equacion preparada

$$96+768z+48z^2+z^3=0;$$

cotejándola con la general $-p+az+bz^2+cz^3+dz^4$ &c. $=0$, sacamos $p=-96$, $a=768$, $b=48$, $c=1$, $d=0$; de donde sale $\frac{a}{p}=-8$, $\frac{b}{p}=-\frac{1}{2}$, $\frac{c}{p}=-\frac{1}{96}$ &c. y

$$Q=\frac{a}{p}=-8$$

$$R=\frac{aQ}{p}+\frac{b}{p}=64-\frac{1}{2}=\frac{127}{2}$$

$$S=\frac{aR}{p}+\frac{bQ}{p}+\frac{c}{p}=-\frac{48385}{96}$$

y

$$q=\frac{b}{p}=-\frac{1}{2}$$

$$r=\frac{aq}{p}+\frac{c}{p}=4-\frac{1}{96}=\frac{383}{96}$$

$$s=\frac{ar}{p}+\frac{bq}{p}+\frac{d}{p}=-\frac{380}{12}.$$

Lue-

Luego $\frac{q}{Q}=\frac{1}{16}$, $\frac{r}{R}=\frac{383}{127\times 48}=\frac{383}{6096}$, $\frac{s}{S}=\frac{380\times 8}{48385}=\frac{3040}{48385}$.

De aquí sale $z=-\frac{16}{127}=-0,12598$, próxîmamente, ó $z=-\frac{6096}{48385}=-0,1259894$, mas próxîmamenne, ó $z=-\frac{9677}{76808}=-0,125989 4802$, todavía mas próxîmamente.

578 Resolvamos últimamente la siguiente equacion $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2.3.4}+\frac{x^6}{2.3.4.5.6}-\frac{x^8}{2.3.4.5.6.7.8}$ &c. $=\frac{1}{2}$, harémos $x^2=z$ &c. será

$-1+z-\frac{z^2}{12}+\frac{z^3}{12.30}-\frac{z^4}{12.30.56}$ &c. $=0$.

Aquí $p=1$, $a=1$, $b=-\frac{1}{12}$, $C=\frac{1}{12.30}$, $d=-\frac{1}{12.30.56}$ &c.

Si substituimos estos valores en la aproxîmacion general (468) $-A=\frac{aab+(ac+bb)\times p+dpp}{a^3+2abp+cpp}=$

$$\frac{-\frac{1}{12}+\frac{1}{12.30}+\frac{1}{12.12}-\frac{1}{12.30.56}}{1-\frac{2}{12}+\frac{1}{12.30}}=-\frac{30.56-56-140+1}{10.30.56+56}$$

$=-\frac{1485}{16856}$. Luego $z=\frac{p}{a-Ap}=\frac{16856}{15371}=1,09661$; y $x=\sqrt{z}=1.04719$.

De las Diferencias.

579 Las cantidades variables por su naturaleza crecen ó menguan; quiero decir, que admiten incrementos ó decrementos; por manera que una cantidad variable experimenta, ó puede experimentar de un instante para otro alguna diferencia por mas ó por menos. Estas diferencias merecen ser atendidas, porque los incrementos ó decrementos de una cantidad variable no pueden menos de alterar el valor de to-

toda funcion suya. Pero como los incrementos ó decrementos de las variables, esto es, sus diferencias, pueden ser finitas ó infinitamente pequeñas, siendo muy distintas la naturaleza y las aplicaciones de unas y otras, trataréмos de ellas separadamente: de las primeras con nombre de *diferencias*; de las segundas con nombre de *diferenciales*.

Cálculo de las diferencias.

580 Supongamos que y es una funcion de x, y que á x le sobreviene un incremento ó decremento ω; no podrá menos de transformarse y en otra cantidad que llamarémos y'. Lo que á y se le agrega ó quita para ser y', es lo que llamamos diferencia de y; la qual siempre que lleva el signo $+$ ó $-$ se llama incremento ó decremento de y. La señal de las diferencias finitas es esta letra griega Δ, que es una *D* mayúscula; por manera que la diferencia finita de y se señala Δy.

Claro está que para hallar las diferencias de los términos de una serie ó progresion arismética creciente, v. gr. hay que restar cada uno de ellos del que se le sigue inmediatamente. Señaladas que estén estas diferencias primeras, y sentada la serie que forman; para hallar las segundas diferencias, ó las diferencias de las diferencias, cuya señal es esta $\Delta\Delta$, se restará tambien cada término suyo del inmediato siguiente. Lo propio se practicará para señalar las diferencias terceras, quartas, &c. que se señalan respectivamente con $\Delta\Delta\Delta$ ó Δ^3, Δ^4 &c.

Esto presupuesto, supongamos que la variable x sea succesivamente x, $x+\omega$, $x+2\omega$, $x+3\omega$ &c. y sea su funcion y succesivamente y, y', y'', y''' &c. correspondiéndose unos con otros dos diferentes valores de la variable x y de su funcion y. Sentarémos estos

valores en dos series una debaxo de otra, y practicarémos lo que acabamos de decir, sacarémos sus diferencias como aquí sigue, y lo acabará de aclarar el exemplo numérico puesto á continuacion, donde van señaladas las diferencias de las quartas potencias de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 &c.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x & & x+\omega & & x+2\omega & & x+3\omega & & x+4\omega & & x+5\omega \\
y & & y' & & y'' & & y''' & & y'''' & & y^{v} \\
& \Delta y & & \Delta y' & & \Delta y'' & & \Delta y''' & & \Delta y'''' & \\
& & \Delta\Delta y & & \Delta\Delta y' & & \Delta\Delta y'' & & \Delta\Delta y''' & & \\
& & & \Delta^3 y & & \Delta^3 y' & & \Delta^3 y'' & & & \\
& & & & \Delta^4 y & & \Delta^4 y' & & & & \\
& & & & & \Delta^5 y & & & & &
\end{array}
$$

	1,	16,	81,	256,	625,	1296,	2401
Difer. I.	15	65	175	369	671	1105 &c.	
Difer. II.	50	110	194	302	434		
Difer. III.	60	84	108	132			
Difer. IV.	24	24	24				

581 Las diferencias de y, sean del grado que fueren, se pueden expresar con valores de la misma y; y bastará probarlo respecto de las diferencias segundas. Porque ya que $\Delta\Delta y = \Delta y' - \Delta y$, $\Delta y' = y'' - y'$, y $\Delta y = y' - y$, será, con executar las debidas substituciones, $\Delta\Delta y = y'' - 2y' + y$.

582 Enseñemos ahora como se sacan las diferencias de y ó de su funcion expresadas con valores de x y constantes.

Sea $y = x^2$, y ω el incremento de x; será $y' = (x+\omega)^2 = x^2 + 2\omega x + \omega\omega$; si restamos la primer equacion de la segunda, será $\Delta y = y' - y = 2\omega x + \omega\omega$. Para sacar la segunda diferencia, substituirémos $x+\omega$ en lugar de x, con lo que Δy se convertirá en $\Delta y' = 2\omega \times (x+\omega) + \omega\omega$; y como $\Delta\Delta y = \Delta y' - \Delta y$, será $\Delta\Delta y$

$\Delta\Delta y =$

$= 2\omega(x+\omega)+\omega\omega-2\omega x-\omega\omega = 2\omega x+3\omega\omega-2\omega x-\omega\omega = 2\omega\omega$, cuya diferencia es constante, por ser ω cantidad constante. Luego la cantidad propuesta no admite diferencias terceras. Ya que $y = x^2$, segun suponemos, y $\Delta y = 2x\omega+\omega^2$, tambien será $\Delta x^2 = 2x\omega+\omega^2$.

583 Sea ahora $y = ax^2+bx$; si x se convierte en $x+\omega$, pasará y á ser y'. Luego $y' = ax^2+2a\omega x+a\omega^2+bx+b\omega$. Luego la diferencia primera ó $\Delta y = y'-y = 2a\omega x+a\omega^2+b\omega$; y la diferencia segunda $\Delta\Delta y = \Delta y'-\Delta y = 2a\omega(x+\omega)+a\omega^2+b\omega-2a\omega x-a\omega^2-b\omega = 2a\omega\omega$.

Sea por último $y = xz$, y pase x á $x+\omega$, y z á $z+\omega$, será $y' = (x+\omega)\cdot(z+\omega) = xz+x\omega+z\omega+\omega\omega$; luego $\Delta y = y'-y = x\omega+z\omega+\omega\omega = \Delta xz$.

Aplicacion de las diferencias al cálculo de los logaritmos.

584 Ya que los logaritmos de las cantidades iguales son iguales unos con otros, y al reves; el logaritmo de un número, despues que recibió algun incremento ó diferencia finita, no puede ser el mismo que le correspondia antes de recibir el incremento. Veamos como se halla el logaritmo que entónces le corresponde.

Supongamos que al número n le sobrevenga un aumento, diferencia finita ó parte suya, de modo que despues del aumento el número sea $n+\Delta n$; hemos de hallar el aumento que entónces compete á su logaritmo, ó la cantidad $\Delta\,\log.n$: claro está que $\log.n+\Delta\log.n$ es el logaritmo con el incremento que le toca despues de aumentado su número, y que por lo mismo es el logaritmo del número, al qual se ha agregado el incremento, ó $\log.(n+\Delta n)$. Luego el valor que buscamos nos le ha de dar la equacion $\log.n+\Delta\log.n = \log.(n+\Delta n)$, la qual da $\Delta\log n =$

 log.

$\log.(n+\Delta n) - \log.n = \log.\frac{n+\Delta n}{n} = \log.\left(1+\frac{\Delta n}{n}\right)$. Si convertimos en serie esta expresion por medio de la fórmula (435) haciendo $x = \frac{\Delta n}{n}$, tendrémos

$$\Delta\log.n = M\left[\left(\frac{\Delta n}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^4 \&c.\right]$$

585 Si n mengua en vez de crecer, tambien menguará su logaritmo. Entonces será $\log.(n-\Delta n) - \log.n = -\Delta\log.n$. El primer miembro se reduce á $\log.\left(1-\frac{\Delta n}{n}\right)$, y por medio de la fórmula (440) se saca

$$-\Delta\log.n = M\left[-\left(\frac{\Delta n}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^4 \&c.\right]$$

586 Aunque resulta la cuestion, vamos á resolverla de otro modo, que nos proporcionará fórmulas nuevas mucho mas convergentes.

Hagamos $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+\Delta n}{n}$, de donde sale $x = \frac{\Delta n}{2n+\Delta n}$ cuyo valor substituido en la equacion (441), y poniendo como antes, $\Delta\log.n$ en lugar de $\log.\frac{n+\Delta n}{n}$, dará

$$\Delta\log.n = 2M\left[\left(\frac{\Delta n}{2n+\Delta n}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta n}{2n+\Delta n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\Delta n}{2n+\Delta n}\right)^5 \&c.\right]$$

587 Esta serie, por la qual se calcula la diferencia que va de un logaritmo conocido á otro mayor,

yor, es mas convergente que la serie (484); y tan convergente como la serie (441) para calcular inmediatamente el logaritmo entero de un número qualquiera.

588 Si Δn fuese negativo, como tambien lo sería $\Delta \log. n$, la equacion (486) se convertiria en estotra

$$-\Delta \log. n = 2M\left(-\left(\frac{\Delta n}{2n-\Delta n}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\Delta n}{2n-\Delta n}\right)^3-\frac{1}{5}\left(\frac{\Delta n}{2n-\Delta n}\right)^5 \&c.\right)$$

589 Ya que por la serie (486) se saca la diferencia que va de log. n á log. $(n+\Delta n)$, podria tambien servir esta fórmula para formar con singular presteza una tabla de los logaritmos de los números. Despues de calculado por la serie (442) el logaritmo hyperbólico de 2, está igualmente calculado el logaritmo de 4, pues log. $4 = \log. 2^2 = 2 \log. 2$. Calculado que esté el logaritmo de 4, en pocos minutos se calculará el logaritmo de 5, el qual costó muchos dias de improbísimo trabajo á los primeros calculadores de logaritmos que no conocian ninguna de nuestras fórmulas. En este caso $n = 4$ y $\Delta n = 1$, y por consiguiente la fórmula (486) se transforma en

$$\Delta \log. 4 = 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \&c.\right)$$

Con calcular solo quatro términos de esta serie se halla la cantidad que debe añadirse al logaritmo de 4 para sacar el logaritmo hyperbólico de 5 con siete decimales cabales; y este logaritmo de 5 sumado con el de 2, dará el log. $10 = 2,302585+$.

590 Ahora sabrémos qual es el módulo de los logaritmos vulgares ó de las tablas. Sabemos que con llamar T el logaritmo tabular de 10, log. $10 = T = 1$, porque el logaritmo de 10 en el sistema tabular es 1; sabemos igualmente que este logaritmo

de 10 es igual al producto del logaritmo hyperbólico I de 10 por M, módulo del sistema vulgar. De todo esto sale $T = IM = 1$, y $I = \frac{1}{M}$; si en lugar de I se substituye el valor del logaritmo hyperbólico de 10, el qual, calculado hasta 25 decimales es 2,3025850929940456840179914 $= \frac{1}{M}$, se sacará $M = 0,4342944819032518276511289$. Con multiplicar por este número un logaritmo hyperbólico dado, se sacará el logaritmo vulgar correspondiente; si multiplicamos por el valor de I ó de $\frac{1}{M}$, ó partimos por M un logaritmo tabular, el producto ó el cociente dará el logaritmo hyperbólico correspondiente.

591 En el supuesto de ser a la base de un sistema logarítmico, por lo dicho (426) se infiere de $a^m = 1 + x$ que $m = \log. (1 + x)$. Como son iguales los logaritmos de las cantidades iguales, de esta equacion tambien se infiere $\log. a^m = \log (1 + x)$; y como $\log. a^m = m \log. a$, tambien tenemos $m \log. a = \log. (1 + x)$. Se verifican, pues, estas dos equaciones $m \log. a = \log. (1 + x)$ y $m = \log. (1 + x)$. Si partimos la primera por la segunda, cada miembro por el suyo, saldrá $\log. a = 1$; pero el número cuyo logaritmo es 1 es 10 en el sistema tabular, luego 10 es la base de este sistema, por ser circunstancia de la base el que su logaritmo sea la unidad.

592 Enseñemos ahora como se saca la diferencia finita del número por la diferencia finita del logaritmo, esto es como de $\Delta \log. n$ se saca Δn. Para esta indagacion acudirémos á la equacion (484), por la qual sacarémos el valor de Δn en $\Delta \log. n$. Con la mira de simplificar el cálculo, darémos á dicha equacion esta forma $m = ay + by^2 + cy^3 + ey^4 + \&c.$ don-

donde $m = \frac{\Delta \log. n}{M}$, $\Delta n = y$, $\frac{1}{n} = a$, $-\frac{1}{2n^2} = b$ &c. y hemos de sacar el valor de y en m. Harémos $y = Am + Bm^2 + Cm^3 + \&c.$ sacarémos los valores de A, B, C &c. por medio de los conocidos a, b, c &c. los substituirémos en su lugar en la última equacion, y tambien en lugar de m é y las cantidades que representan, y saldrá últimamente

$$\Delta n = n\left[\left(\frac{\Delta \log. n}{M}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\Delta \log. n}{M}\right)^2 + \tfrac{1}{2.3}\left(\frac{\Delta \log. n}{M}\right) \&c.\right]$$

Si hacemos las mismas operaciones con la equacion (485), teniendo múy presente que aquí $m = -\frac{\Delta \log. n}{M}$, $y = -\Delta n$, siendo los mismos que antes los signos de a, b, c &c. saldrá

$$-\Delta n = n\left[-\frac{\Delta \log. n}{M} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\Delta \log. n}{M}\right)^2 - \tfrac{1}{2.3}\left(\frac{\Delta \log. n}{M}\right)^3 \&c.\right]$$

593 En virtud de las fórmulas, y de lo dicho (490) se pueden convertir facilísimamente los logaritmos tabulares en hyperbólicos, y recíprocamente. Propongámonos sacar por medio de las tablas vulgares el logaritmo hyperbólico de 10,09. Tomarémos el logaritmo tabular correspondiente con ocho decimales, á fin de que salga mas cabal la séptima, cuyo logaritmo es 1,00389117; por cada uno de sus guarismos multiplicarémos la cantidad $\frac{1}{M}$ (490), sentándolos ordenadamente, y tendrémos

$$\frac{1}{M} = 2,30258509$$
$$\frac{0,003}{M} = 690776$$
$$\frac{0,0008}{M} = 184207$$
$$20723$$
&c. $$230$$
$$23$$
$$16$$

Suma $2,3115448 = \log. 10,09$

594 Considérese de paso quan convergente es la serie (486) aplicando la consideracion á este caso; pues solo con calcular su primer término se saca cabal con 7, y aun con 8 decimales, la cantidad que se ha de añadir á 2,3105532 log. 10,08, para sacar el logaritmo de 10,09. Entonces $n = 10,08$, y $\Delta n = 0,01$. Luego con tomar solamente el primer término de la serie (porque el segundo tendria nueve ceros despues de la coma, y por lo mismo no podria alterar el valor de las siete primeras decimales) saldrá

$$\Delta \log. n = 2 \times \frac{0,01}{20,17} = 0,0009916$$
$$\text{Log}. 10,08 = 2,3105532$$

Suma ó log. $10,09 = 2,3115448$

De las Diferenciales.

595 Sea $\frac{a}{b} = q$, de modo que q exprese el cociente de a partida por b; claro está que quanto mas mengüe b, tanto mayor será q. El grado má-

máxîmo de decremento á que puede llegar b es o; luego $\frac{a}{o}$ es el límite de todos los incrementos de q. Como toda cantidad es por esencia capaz de aumento ó diminucion al infinito, quando crece se acerca al grado máxîmo de incremento, al límite de sus aumentos, bien que nunca le alcanza; porque si llegara á alcanzarle, ya no podria crecer mas, ya no admitiria mas aumentos, y por lo mismo dexaria de ser cantidad. Este límite de los aumentos es lo que los matemáticos llaman el infinito, cuya expresion es esta $\frac{a}{o}$, y ∞ el signo con que le señalan.

596 Una cantidad que va menguando va siendo cada instante menor, va acercándose al grado máxîmo de su diminucion, que es ser $=$ o; á cuyo grado, límite de sus decrementos, nunca llega, porque entónces dexaria de ser cantidad, ó sería no nada. Ni el infinito, ni o son cantidades; son términos, son límites á los quales las cantidades se pueden acercar mas y mas, sin nunca jamas llegar á ellos.

597 Bien que toda cantidad que va creciendo, y se va acercando á su grado máxîmo de aumento nunca le alcanza; sin embargo quando es lícito y aun necesario suponer que ha llegado, se la llama *cantidad mayor que otra qualquiera señalable*, *cantidad infinita*. Y porque toda cantidad que va menguando se va acercando por los mismos grados á o, bien que nunca llega; sin embargo quando es lícito y aun necesario suponer que ha llegado, se la llama *cantidad menor que toda cantidad asignable*, ó *infinitamente pequeña*.

598 Las diferencias finitas de las variables y de sus funciones, pueden menguar de modo que se vayan acercando mas y mas al último grado ó límite

te de sus decrementos; quanto mas próxîmas las supongamos á este estado, tanto menores serán, tanto mas fundamento tendrémos para considerarlas como cantidades menores que qualquiera cantidad señalable, y llamarlas *infinitamente pequeñas.* Llegadas á este estado, las señalarémos con esta letra *d*, por manera que la diferencial de la variable x es dx, la de su funcion y será dy, la del binomio $x+a$ será $d(x+a)$, la del polinomio $x^2+2ax+a^2$ será $d(x^2+2ax+aa)$ ó $d\times(x^2+2ax+aa)$ &c.

599 Entre las diferencias finitas de las cantidades x é y v. gr. hay una razon que se expresa así $\frac{\Delta x}{\Delta y}$; y quando estas diferencias se consideran como llegadas al sumo grado de decremento su expresion es $\frac{dx}{dy}$. El asunto del cálculo diferencial es señalar la razon entre estas diferencias infinitamente pequeñas, ó la razon del límite de las diferencias finitas.

600 Lo dicho hasta aquí manifiesta con suma evidencia que cosa es el infinito matemático; es un modo abstracto de considerar lo finito. Si al considerar una extension finita, sea la que fuere, prescindimos de los límites en que está ceñida, formarémos idea de una extension infinita; solo por este medio podemos formar concepto de una extension, duracion &c. infinita.

601 Esto mismo hace patente que el infinito conforme le consideran los matemáticos, no es otra cosa que el límite de lo finito, el término ácia el qual se encamina, quando va creciendo, sin alcanzarle jamas, pero al qual suponemos no obstante que se va acercando sin cesar.

602 Quando probamos (I. 218) que esta serie

rie de números $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ &c. continuada al infinito $=1$, nuestro empeño fué probar que el número 1 es el límite de la suma de la expresada serie; esto es, que quantos mas términos se tomen de la tal serie, tanto mas la suma de dichos términos se acercará á valer 1, á cuyo valor podrémos acercarnos quanto queramos. Esta última condicion es indispensable para que salga cabal el concepto que queremos dar de la voz límite. Porque el número 2 v. gr. no es el límite de la suma de la expresada serie; pues aunque con tomar mas y mas términos de la serie, la suma se acerque mas y mas al número 2, por lo mismo que se irá acercando mas y mas á 1, no se acercará sin embargo quanto se quiera al número 2, porque la suma de la serie nunca pasará de 1.

603 Quando decimos que un círculo es un polígono de una infinidad de lados, nuestro fin es dar á entender que el círculo es el límite de los polígonos que se le pueden inscribir y circunscribir; esto es, que quantos mas lados tengan dichos polígonos, tanto mas se acercan á confundirse con el círculo, del qual se puede suponer que discrepan tan poco como se quiera, con suponer tan grande como se quiera el número de sus lados.

604 Este es el concepto que conviene formarse del infinito matemático, cuyo concepto es sencillo y cabal, y ataja todas las sofisterías de la cavilacion.

A los matemáticos nada les importa escudriñar si hay en la naturaleza visible cantidades infinitas actualmente exîstentes; si el espacio es realmente infinito, si la duracion es infinita; si en una porcion finita de materia hay un número realmente infinito de partecillas. Esto nada tiene que ver con el infinito matemático, el qual no es mas que el lí-

límite de lo finito; de cuyo límite no necesita la Matemática suponer la exîstencia, le basta que lo finito nunca llegue á alcanzarle.

605 Manifestarémos la facilidad que, sin perjuicio del rigor matemático, introduce en los cálculos el considerar como infinitamente pequeñas, ó infinitas las cantidades, esto es, el considerarlas como llegadas á su límite, bien que nunca le alcancen.

Para lo primero buscarémos la suma de esta progresion $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ &c. decreciente continuada al infinito. Como la progresion es decreciente, y la suponemos continuada al infinito, su último término será infinitamente pequeño ó nulo; pues la última de muchas cantidades finitas que todas van menguando, infinitas en número, ha de ser infinitamente menor que la primera, ó nula. Buscarémos la suma por la fórmula $s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$ (114); pero como esta se sacó en el supuesto de ser creciente la progresion, y la que queremos sumar aquí es decreciente, supondrémos decreciente, y por lo mismo trastornada la progresion, de la qual se sacó la fórmula, en cuyo supuesto esta será $s = \frac{a - aq^n}{1 - q}$, donde aq^n último término es cero, y la expresion de la suma será $s = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$, porque $a = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, y $1 - q = \frac{1}{2}$. Esto mismo hallamos antes (I.218) por otro camino.

Para lo segundo supondrémos que se nos ofrezca sacar la suma de los quadrados de todos los números naturales. Los números naturales son infinitos

tos en número, luego en la fórmula (392) de la suma de sus quadrados $\frac{n.(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$, hemos de suponer n infinita; en este supuesto los términos $3n^2$ y n del numerador son nulos respecto del primer término $2n^3$; luego se han de desechar, y la fórmula queda reducida á $\frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3}$.

606 Hay diferentes órdenes, grados ó clases de infinitos matemáticos, esto es, unos mayores que otros. Quando x es infinita, lo son tambien todas sus potencias de exponente positivo; porque $1 : x :: x : xx$; luego ya que en el supuesto de ser x infinita, es infinitamente mayor que 1, tambien será xx infinitamente mayor que x cantidad infinita. Será, pues, x infinito de primer grado, xx infinito de segundo, x^3 de tercero, &c. pues verificándose, como se verifica, esta proporcion $1 : x :: xx : x^3$, se sigue que x^3 es infinitamente mayor que el infinito x^2 de segunda órden. Estos son los infinitos potenciales.

607 Los infinitos radicales se demuestran con igual facilidad. Quando x es infinita, lo es tambien $\sqrt{x}$, pues ningun número finito, v. gr. b puede ser $= \sqrt{x}$. Porque si fuese $b = \sqrt{x}$, será $b^2 = x$; luego el producto de dos factores finitos cada uno $= b$, sería igual al infinito x, cuya consecuencia es un absurdo; lo mismo se probará de $\sqrt[6]{x}$ ó $x^{\frac{1}{6}}$. Sabemos que en todos los casos se verifica esta proporcion $1 : \sqrt{x} :: \sqrt{x} : x$; por consiguiente así como 1 es infinitamente menor que $\sqrt{x}$, es tambien el infinito $x^{\frac{1}{2}}$ menor que el infinito x. Tambien probarémos que el infinito $x^{\frac{1}{3}}$ es infinitamente menor que el infinito $x^{\frac{1}{2}}$, para lo qual conviene tener presente

Fig. te que $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, y $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. Es patente que $x^{\frac{1}{6}} : 1 :: x^{\frac{3}{6}} : x^{\frac{2}{6}}$; luego así como el infinito $x^{\frac{1}{6}}$ es infinitamente mayor que 1, tambien el infinito $x^{\frac{3}{6}} = x^{\frac{1}{2}}$ es infinitamente mayor que $x^{\frac{2}{6}} = x^{\frac{1}{3}}$.

608 Lo que dexamos dicho acerca del infinito manifiesta el concepto que debe formarse de las cantidades infinitamente pequeñas; no son estas cantidades realmente exîstentes, ni tampoco supone su exîstencia la matemática. Son cantidades menores que otra qualquiera cantidad asignable; son el límite al qual se van acercando, sin alcanzarle jamas, las cantidades que van menguando.

609 Para dar mejor á conocer su naturaleza, su-
71. pongamos que se nos ofrezca tirar en el punto *A* una tangente á la curva *CAB*. Tiraremos desde luego por dos puntos *A* y *B* de la curva la secante *AB*, prolongándola indefinitamente ácia *Z* y *X*; y por los dos puntos *A*, *B* de la curva, las dos ordenadas *AD*, *BE* perpendiculares al exe *CE*. Es patente que la posicion de la secante pende de la distancia *DE* que hay entre las dos ordenadas, cuya distancia es la diferencia que va de la abscisa *CE* á la abscisa *CD*, y pende tambien de la diferencia *BO* que va de la una ordenada á la otra. Luego si conociéramos estas diferencias, ó la razon que hay entre la distancia de las ordenadas y su diferencia, conoceríamos tambien la posicion de la secante. Figurémonos que el uno de los dos puntos *A*, *B* de la curva, v. gr. el punto *B* se vaya arrimando sin cesar al punto *A*, y que por el punto *A*, suponiéndole fixo, se ha tirado una tangente *AP* á la curva; claro está que la secante *AB*, tirada por los dos puntos *A*, *B*, de los quales suponemos que el uno se va arrimando al otro, se irá acer-

can-

cando de contino á la tangente, por manera que llegará á ser la tangente misma, quando los dos puntos *A*, *B* lleguen á confundirse en solo un punto. Por consiguiente la tangente es el límite de la secante; el término al qual se va arrimando incesantemente, sin que nunca jamas pueda llegar, pero al qual se puede acercar quanto se quiera. Pero, segun acabamos de ver, la posicion de la secante la determina la razon entre la diferencia *BO* de las ordenadas y su distancia *DE*. Luego si buscamos el límite de esta razon, esto es, el valor al qual se aproxîma mas y mas esta razon al paso que la una de las dos ordenadas se va arrimando á la otra, este límite determinará la posicion de la tangente, una vez que la tangente es el límite de la secante. Fig. 71.

Es evidente que quanto menor sea cada una de estas diferencias, tanto mas se acercará su razon al límite que se busca, pues tanto mas próximo estará el punto *B* á confundirse con el punto *A*. Es tambien evidente que no llegando estas diferencias á ser de todo punto nulas, su razon no es rigurosamente igual al límite; y que en el caso de llegar á ser nulas, ya no hay entre ellas razon alguna, porque entre dos nonadas no hay razon. Pero no por eso dexa de ser menos real el límite de la razon que habia entre las dos cantidades quando eran todavía algo, y el valor de este límite es el que encamina, por lo dicho, á determinar la posicion de la tangente.

610 Como la razon de las diferencias, quanto menores estas son, tanto mas se acerca á su límite; este es el motivo por que expresamos el límite de la razon con la razon que tienen unas con otras las diferencias infinitamente pequeñas. Pero esta razon entre las diferencias infinitamente pequeñas no es mas que un modo abreviado de expresar una nocion

cion mas cabal y rigurosa, esto es, el límite de la razon de las diferencias finitas. Porque las diferencias infinitamente pequeñas, ó no exîsten realmente, ó por lo menos no hay necesidad de suponer que exîsten realmente para determinar cabal y rigurosamente dicho límite.

611 Hay tambien varios órdenes ó grados de infinitamente pequeños así potenciales como radicales.

Porque si una variable x es infinitamente pequeña, todas sus potencias y raices de exponente positivo son tambien infinitamente pequeñas; siguiendo estas potencias y raices la misma gradacion que los infinitos; por manera que hay infinitamente pequeños de primera, segunda, &c. órden. Si x es infinitamente pequeña, xx es todavía infinitamente menor, ó un infinitamente pequeño de segunda órden; x^3 infinitamente pequeño de tercera órden, &c. Porque 1, x, xx, xxx &c. son cantidades proporcionales, y así como 1 es infinitamente mayor que x, tambien x es infinitamente mayor que xx &c.

613 Por lo que mira á los órdenes radicales, se probarán con igual facilidad. Ya que $x^{\frac{1}{2}}$ es media proporcional entre el finito 1 y el infinitamente pequeño x, es infinitamente pequeña, bien que lo es menos que x. Y $x^{\frac{1}{3}}$, otro infinitamente pequeño, lo es infinitamente menos que $x^{\frac{1}{2}}$. Porque $x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{6}} : x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{6}} :: 1 : x^{\frac{1}{6}}$.

613 Acerca de los infinitos potenciales, hemos de reparar, que las potencias con exponente negativo de una cantidad infinita son cantidades infinitamente pequeñas, v. gr. $x^{-1} = \frac{1}{x}$ es infinitamente pequeño. Porque el cociente de una division es tanto menor, quanto mayor es el divisor, per-

ma-

maneciendo el mismo dividendo. Luego la division de lo finito 1 partido por el infinito x ó $\frac{1}{x}$ partido por x, esto es $\frac{1}{xx}$ ó x^{-2}, es infinitamente menor, por ser el infinitamente pequeño partido por el infinito x. Pero $x^{-\frac{1}{2}}$ ó $\frac{1}{\sqrt{x}}$, bien que infinitamente pequeña, por ser $\sqrt{x}$ infinita, $x^{-\frac{1}{2}}$ digo es infinitamente menos pequeña que x^{-1}; porque $x^{-\frac{1}{2}}$ ó $\frac{1}{\sqrt{x}}$ es media proporcional entre 1 y x^{-1}, ó $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

614 Tambien hay que hacer otro reparo acerca de las potencias y raices con exponente negativo de las cantidades infinitamente pequeñas, cuyas potencias y raices son infinitas. Quando x es infinitamente pequeña, x^{-1} ó $\frac{1}{x}$ es infinita de primer grado, porque en lo finito 1 cabe una infinidad de veces el infinitamente pequeño x; x^{-2} ó $\frac{1}{xx}$ es el infinito $\frac{1}{x}$ multiplicado por él mismo, es infinito de segunda orden. Pero $x^{-\frac{1}{2}}$ ó $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es un infinito radical.

615 *Si la diferencia que va de una cantidad á otra mengua sin cesar, de modo que al cabo sea menor que toda cantidad señalable ó apreciable, las dos cantidades serán por último iguales.*

Porque si no fuesen iguales, se podrá señalar su diferencia, ó su diferencia será una cantidad señalable, cuya consecuencia repugna con el supuesto.

616 Síguese de aquí 1.º que x, cantidad finita, es lo mismo que $x \pm dx$. Porque dx es la diferencia finita de x, cuya diferencia ha menguado has-

ta llegar á ser menor que toda cantidad señalable. 2.° que siendo x infinita, y a cantidad finita, lo mismo es x que $x \pm a$. Porque si $x+a$ v. gr. fuese mayor que x, la cantidad x con el aumento a sería mayor que sin él; luego x antes de sobrevenirle el incremento a, no sería mayor que toda cantidad asignable; luego no sería infinita, cuya consecuencia repugna con el supuesto.

617 Luego finalmente 1.° no crece ni mengua una cantidad finita porque se le añada una cantidad infinitamente pequeña; 2.° no crece ni mengua el infinito porque se le añada ó quite una cantidad finita; 3.° no crece ni mengua una cantidad infinita de orden determinada porque se le añada ó quite un infinito de grado menor; 4.° no crece ni mengua un infinitamente pequeño de grado determinado porque se le añada ó quite otro infinitamente pequeño de grado menor.

DEL CALCULO DIFERENCIAL.

618 El asunto del cálculo diferencial es hallar las diferencias infinitamente pequeñas de las cantidades variables, el último decremento ó el límite de las diferencias finitas.

Se supone por lo mismo en esta investigacion que la variable x v. gr. llega á ser, segun crece ó mengua, $x \pm dx$, y el fin es señalar la expresion del incremento ó decremento infinitamente pequeño dx. Con esta mira, si $y = x$, se substituye en esta equacion $x+dx$ en lugar de x, quando x crece (supondrémos que la variable crece) y la equacion será entonces $y' = x+dx$; se restará la primera de la segunda, y será $y' - y = x+dx-x$, ó $dy = dx$; queda, pues, averiguada la equacion entre los límites por medio de la equacion entre la variable x y su funcion y.

Al

619 Al diferenciar las cantidades suelen ocurrir varios casos que vamos á especificar, y de cada uno sacarémos una regla general que rija en todos los que se le parezcan.

I. Propongámonos diferenciar la equacion $y = x + a$. En lugar de x pondrémos (518) $x + dx$, y será $y' = x+dx+a$; luego $y'-y = dy = x+dx+a-x-a = dx$; luego $d(x+a) = dx$. Si la variable menguare, en $y = x$ substituiríamos $x-dx$ en lugar de x, y saldría $d(x+a) = -dx$. En cada uno de estos dos casos sale la misma diferencial, desapareciéndose la constante a en la diferenciacion; y así debe ser, pues las cantidades constantes, por lo mismo que ni crecen ni menguan, no tienen diferencial, ó su diferencial es 0.

620 Luego es regla general que la diferencial de una variable mezclada con constantes por adicion ó sustraccion es la misma que si estuviera sola.

621 II. Sea $y = x^2$; pongamos $x+dx$ en lugar de x, de lo que saldrá $y' = x^2+2xdx+dx^2$; luego $y'-y = dy = x^2+2xdx+dx^2-x^2 = 2xdx+dx^2$. Luego $d(x^2) = 2xdx+dx^2$. Pero $2xdx : dx^2 :: 2x : dx$; luego el término dx^2 es infinitamente menor que $2xdx$, luego puede ó debe desecharse (517); luego finalmente $d(x^2) = 2xdx$.

Sea $y = x^n$, y pongamos $x+dx$ en lugar de x; será $y' = (x+dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n.(n-1)}{1.2}x^{n-2}dx^2$ &c.; luego $y'-y = dy = nx^{n-1}dx + \frac{n.(n-1)}{1.2}x^{n-2}dx^2$. Pero como dx^2 es infinitamente pequeño de segunda orden, es no nada en comparacion de dx, infinitamente pequeño de primera (517); por consiguiente el segundo miembro de la última equacion queda reducido á su primer término solo, y $dy = nx^{n-1}dx$.

Diferenciemos ahora una potencia de x con exponente negativo, de modo que sea $y = x^{-n}$. Si en lugar de x substituimos $x + dx$, será $y' =$

$$(x+dx)^{-n} = x^{-n} - nx^{-n-1}dx - \frac{n.(-n-1).x^{-n-2}}{1.2}dx^2$$

&c., de donde sale $y' - y = dy = -nx^{-n-1}dx$, por desvanecerse el término siguiente donde está dx^2 (517), y con mas razon todos los que se le siguen. Sácase de los dos últimos casos la siguiente

622 *Regla general.* La diferencial de toda potencia de una cantidad variable se saca multiplicando dicha potencia reducida á un grado una unidad menor por el exponente que lleva y por su diferencial dx.

Por esta regla será $d(x^4) = 4x^3dx$, y $d(x^{-4})$ será $-4x^{-5}dx$.

623 Quando la potencia de la variable cuya diferencial se busca, está multiplicada por un factor constante, subsiste este factor en la diferencial.

Busquemos la diferencial de ax^n, por manera que sea $y = ax^n$, y $y' = a \times (x+dx)^n = ax^n + anx^{n-1}dx + \frac{n.n-1}{1.2}ax^{n-2}dx^2$ &c. será $y' - y = dy = nax^{n-1}dx$ (517). Luego $d(ax+bx^2) = adx + 2bxdx$. La diferencial de $a + 3x^2 - 4cx^3 = 6xdx - 12cx^2dx$.

624 La misma regla sirve para diferenciar los radicales ó las potencias imperfectas; no obstante, la demostraré separadamente.

Propóngome hallar la diferencial de $\sqrt[n]{x^m}$; será

$y = \sqrt[n]{x^m}$, $y^n = x^m$, de cuya equacion la diferencial es $ny^{n-1}dy = mx^{m-1}dx$ (522) y $dy = \frac{m}{n}\,\frac{x^{m-1}dx}{y^{n-1}}$. Como $y^n = x^m$, $y = x^{\frac{m}{n}}$, y $y^{n-1} = \frac{y^n}{y}$; si en el denominador de $\frac{x^{m-1}dx}{y^{n-1}}$ substituimos en lugar de y^{n-1} sus valores, será $dy =$

$$\frac{m}{n}\,\frac{x^{m-1}dx}{\frac{x^m}{x^{\frac{m}{n}}}},\ \text{ó}\ \frac{m}{n}\,\frac{x^{m-1+\frac{m}{n}}dx}{x^m} = \frac{m}{n}$$

$x^{m-m-1+\frac{m}{n}}dx$, y finalmente $dy = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$.

Si se me pide la diferencial de $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, será $m = 1$, $n = 2$, y la diferencial será $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}dx = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

La diferencial de $\sqrt[3]{x}$ ó $d(x^{\frac{1}{3}})$ se hallará luego considerando que aquí $m = 1$, $n = 3$; luego $d(x^{\frac{1}{3}})$ $= \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}}dx}{3} = \frac{\sqrt[3]{(x^{-2})}dx}{3} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

625 Por la misma regla se diferencian las potencias de los polynomios, porque mediante las transformaciones se reduce facilmente un polynomio á monomio, conforme vamos á manifestarlo.

Para sacar la diferencial de $y = (a+x)^n$, hago

$a+x=u$, cuya diferencial es $dx=du$ (520); será, pues, $y=u^n$, de cuya equacion la diferencial es $dy=nu^{n-1}du=n(a+x)^{n-1}dx$.

Si he de buscar la diferencial de la equacion $y=(a+bx+cx^2)^n$, haré $a+bx+cx^2=u$, cuya diferencial es $bdx+2cxdx=du$. Hago ahora $y=u^n$, y será $dy=nu^{n-1}du=n(a+bx+cx^2)^{n-1}\times(bdx+2cxdx)$. De estos casos se deduce la

626 *Regla general.* La diferencial de la potencia de un polynomio es igual al producto del exponente de la potencia multiplicado por otra potencia del polynomio de grado una unidad menor, y por la diferencial del mismo polynomio.

627 Veamos ahora como se halla la diferencial del producto de muchas variables, para lo qual buscarémos la diferencial de ux.

Será $y=ux$ la equacion por diferenciar, con substituir $x+dx$ en lugar de x, y $u+du$ en lugar de u. Tendrémos $y'=(x+dx)\times(u+du)=ux+udx+xdu+dudx$; luego $y'-y=dy=udx+xdu+dxdu$. Pero $dxdu$ producto de dos infinitamente pequeños de primer grado es cantidad infinitamente pequeña del segundo, y por consiguiente despreciable en comparacion de los otros dos términos del segundo miembro de la equacion (517); luego $dy=udx+xdu$. Esta conclusion da la

628 *Regla general.* La diferencial del producto ux de dos variables, se compone del producto de la una variable por la diferencial de la otra, y del producto de esta por la diferencial de la primera.

629 Si hubiésemos de diferenciar la equacion $y=tuz$, harémos $tu=x$; luego $y=xz$, cuya diferencial es (528) $dy=zdx+xdz$. Pero la diferencial de la equacion $x=tu$ es $dx=udt+tdu$. Si substituimos en la primer diferencial $udt+tdu$ en lugar de

de dx, y en lugar de x el producto tu, sacarémos por último $dy = zudt + ztdu + tudz = d(tuz)$. Luego

La diferencial de todo producto de muchas variables consta de tantos términos quantas son las variables del producto.

La misma regla dará la diferencial del producto de muchos factores polynomios, v. gr. la de esta equacion $y = (a+x)^2 \times (b^2+x^2)$, la qual por la regla será $dy = (b^2+x^2) \times d(a+x)^2 + (a+x)^2 \times d(b^2+x^2)$; pero $d(a+x)^2 = 2(a+x)dx$ y $d(b^2+x^2) = 2xdx$, luego $dy = 2 \times (b^2+x^2)(a+x)dx + 2(a+x)^2 xdx$.

630 Por el mismo camino se halla la diferencial de la equacion quando el uno de sus miembros es un quebrado en cuyo numerador y denominador hay cantidades variables.

Sea $y = \frac{x}{z}$ ó $y = xz^{-1}$, será $dy = z^{-1}dx - xz^{-2}dz = \frac{dx}{z} - \frac{xdz}{z^2} = \frac{zdx - xdz}{z^2}$, reduciéndolo todo á un mismo denominador. Es, pues, por

Regla general la diferencial de un quebrado cuyos dos términos son cantidades variables es igual al producto del denominador multiplicado por la diferencial del numerador, menos el numerador multiplicado por la diferencial del denominador, partida la diferencia por el quadrado del denominador.

Sea por diferenciar la equacion $y = \frac{(a+x)^2}{b+x} = (a+x)^2 \times (b+x)^{-1}$. Será, pues, $dy = (b+x)^{-1} \times d(a+x)^2 + (a+x)^2 \times d(b+x)^{-1} = (b+x)^{-1} \times 2(a+x)dx - (a+x)^2 \times (b+x)^{-2} dx = \frac{2(a+x)^2 dx}{b+x} - \frac{(a+x)^2 dx}{(b+x)^2} = \frac{2(b+x)(a+x)dx - (a+x)^2 dx}{(b+x)^2}$.

Varios exemplos de diferenciacion.

631 1.° $d(x^3 - ax^2 + axy - y^3) = 3x^2dx - 2axdx + axdy + aydx - 3y^2dy$.

2.° La diferencial de la equacion $y^2 - a^2 = x\sqrt{(aa - xx)}$, es $2ydy = dx\sqrt{(aa - xx)} + \frac{xdx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, ó reduciendo el último miembro á un mismo denominador $2ydy = \frac{(a^2 - x^2)dx + xd}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$.

3.° La diferencial de la equacion $2y^3 + x^2y - 2cyz = z^3 - 3yz^2$ es $6y^2dy + 2yxdx + x^2dy - 2cydz - 2czdy = 3z^2dz - 3z^2dy - 6yzdz$.

O si no, pártase la equacion por y, y tendrémos $2y^2 + x^2 - 2cz = \frac{z^3}{y} - 3z^2$, cuya diferencial es $4ydy + 2xdx - 2cdz = \frac{3z^2dz}{y} - \frac{z^3dy}{y^2} - 6zdz$, ó $4y^3dy + 2y^2xdx - 2cy^2dz = 3yz^2dz - z^3dy - 6y^2zdz$.

4.° Sea por diferenciar la equacion $x^3 - ay^2 + \frac{by^3}{a+y} - xx\sqrt{(ay + xx)}$, su diferencial es $3x^2dx - 2aydy + \frac{3by^2dy}{a+y} - \frac{by^3dy}{(a+y)^2} - 2xdx\sqrt{(ay + xx)} - \frac{ax^2dy - 2x^3dx}{2\sqrt{(ay + x^2)}}$, ó $3x^2dx - 2aydy + \frac{3aby^2dy + 2by^3dy}{(a+y)^2} - \frac{4ayxdx + 6x^3dx + ax^2dy}{2\sqrt{(ay + xx)}}$.

5.° Para sacar la diferencial de. . . . . $\sqrt{[ax + \sqrt{(aa - xx)}]} = u$, lo quadrarémos todo, y será $ax + \sqrt{(aa - xx)} = uu$, cuya diferencial es $adx - \frac{xdx}{\sqrt{(aa - xx)}} = 2udu$, luego $du = \frac{adx}{2u} - \frac{xdx}{2u\sqrt{(aa - xx)}}$ ó $du = \frac{adx - \frac{xdx}{\sqrt{(aa - xx)}}}{2\sqrt{[ax + \sqrt{(aa - xx)}]}}$.

De

De las diferenciales segundas, terceras, &c.

632 Lo que va dicho de las primeras diferenciales da quanta luz se necesita para entender que cosa son las diferenciales superiores, acerca de las quales solo nos importa conocer la relacion que tienen unas con otras. Ya que la razon entre las diferencias infinitamente pequeñas de las cantidades variables se expresa con alguna funcion, si comparamos el incremento ó decremento infinitamente pequeño de esta funcion con el primero, formarémos concepto de las segundas diferenciales, de las terçeras, quartas, &c.

633 Diferenciemos la equacion $y = a + bx + cx^2 + ex^3 + \&c.$ y será $dy = bdx + cd(x^2) + ed(x^3) + \&c.$

Si en lugar de x substituimos $x + dx$, los términos del segundo miembro constarán de potencias de x y de potencias de dx, del mismo grado que tiene x en cada uno, quiero decir, que en el primero estará dx, en el segundo $(dx)^2$ en el tercero $(dx)^3$, &c. Si llamamos p, q, r, &c. los coeficientes de los términos donde están dx; $(dx)^2$, $(dx)^3$, será $dy = pdx + q(dx)^2 + r(dx)^3 + \&c.$ cuya equacion despues de partido todo por dx, da $\frac{dy}{dx} = p + q(dx) + r(dx)^2 + \&c.$ que expresa la razon de dy con dx, y se reduce á $\frac{dy}{dx} = p$, por ser infinitamente pequeños todos los términos de segundo miembro respecto del primero.

Diferenciemos ahora la equacion $\frac{dy}{dx} = p$, en el supuesto de ser dx constante, saldrá $\frac{ddy}{dx} = dp$. Como por lo dicho poco ha p lleva x, ó p es funcion de x, habrá en dp ó en la diferencial de p la diferencial de x, esto es dx, y cantidades finitas. Llámolas P, con lo que será $dp = Pdx$, y tendré-

drémos $\frac{ddy}{dx} = Pdx$, ó $\frac{ddy}{dx^2} = P$.

Luego *la segunda diferencial se halla del mismo modo que la primera, en el supuesto de ser* dx *constante. Con cuyo fin se diferencia la cantidad constante* p *enlazada con* dx.

634 Cálculos hay donde no se considera como constante la dx, entonces se atiende á la segunda diferencial ddx, de la variable x. Ya que $dy = p \times dx$ (533), si diferenciamos esta equacion, sacarémos $ddy = d \times p \times dx + pddx$, ó, con hacer $dp = Pdx$, como antes; será $ddy = Pdx^2 + pddx$. De aquí se infiere que

La segunda diferencial, quando no se hace constante la dx, *se halla añadiendo á la diferencial que da el supuesto de ser constante* dx, *el producto de* p *por* ddx.

635 Por el mismo camino se hallarán las diferenciales terceras y mas altas. Hemos sacado que $\frac{ddy}{dx^2} = P$; si hacemos constante la dx, y diferenciamos otra vez, sacarémos la tercera diferencial $\frac{d^3y}{dx^2} = dP$; y por ser P funcion de x, no puede menos de estar dx en su diferencial. Hagamos, pues, $dP = P'dx$, y será $\frac{d^3y}{dx^2} = P'dx$, ó $\frac{d^3y}{dx^3} = P'$. Luego

Para sacar la tercera diferencial se han de diferenciar las variables que lleva la segunda, en el supuesto de ser dx *constante.*

636 Ya que $\frac{ddy}{dx^2} = P$, y $\frac{d^3y}{dx^3} = P'$ expresan las diferenciales segundas y terceras, se acaba de aclarar que cosa es sacar la diferencial segunda, tercera, &c. de una equacion; es lo propio que buscar el límite de la razon de las segundas di-

fe-

ferenciales, ó de las diferenciales de las diferenciales primeras, esto es el límite de la razon de las cantidades ddy y dx^2, d^3y y dx^3. Claro está que P y P' que expresan dicha razon son cantidades finitas, son, pues, dx^2, ddy y dx^3, d^3y diferenciales de una misma orden.

Por consiguiente, si $dy = pdx$ expresa la diferencial primera, la segunda tendrá esta forma $ddy = qdx^2$, con hacer $d \times p = qdx$; la tercera diferencial tendrá esta forma $d^3y = rdx^3$, con hacer $d \times q = rdx$. Apliquemos esta doctrina á algunos exemplos.

637 I. Qual será la segunda diferencial de la equacion $y = x^3$.

Su primer diferencial es $dy = 3x^3dx$; la segunda será $ddy = dx \times d \times 3x^2 = dx \times 6xdx = 6xdx^2$.

Para hallar la segunda diferencial de $y = \frac{aa}{aa + xx}$, sacarémos desde luego la primera que es $dy = \frac{-2a^2xdx}{(a^2 + x^2)^2}$, y la segunda será $ddy = -dx \times d\frac{2a^2x}{(aa + xx)^2} = \frac{-dx \times 2a^2dx}{(a^2 + x^2)^2} + \frac{8a^2x^2dx^2}{(a^2 + x^2)^3} = \frac{(6a^2x^2 - 2a^4)dx^2}{(a^2 + x^2)^3}$.

La tercera diferencial de la misma equacion es $d^3y = dx^2 \times \frac{d \times (6a^2x^2 - a^4)}{(a^2 + x^2)^3} = dx^2 \frac{(12a^2xdx)}{(a^2 + x^2)^3} - \frac{(6a^2x^2 - 2a^4)6xdx}{(a^2 + x^2)^4} = \frac{(24a^4x - 24a^2x^3)dx^3}{(a^2 + x^2)^4}$.

La diferencial de $zdy - adx = 0$ es $dzdy + zddy - addx = 0$. Tambien se saca por las substituciones, con cuya mira harémos $s = dy$, $t = dx$, ahora $ds = ddy$, y $dt = ddx$; luego la equacion $zdy - adx = zs - at = 0$, cuya diferencial es $zds + sdz - adt = 0$, la qual, con substituir los valores de s, ds, dt, se convierte en $zddy + dydz - addx = 0$, la misma que antes.

Diferenciemos la equacion $2xdxdz = ayddy$ en el

Fig. el supuesto de ser constante la dx, sacarémos $2dx^2dz+2xdxddz = ayd^3y+adyddy$.

De otro modo. Hagamos $dx=b$, $dz=t$, $ddy=u$; con esto la equacion propuesta se convertirá en estotra $2bxt = ayu$, cuya diferencial es $2btdx+2bxdt = audy+aydu$; y con substituir en lugar de t, dt, b, u, du sus iguales dz, ddz, dx, ddy, d^3y, tendrémos $2dzdx^2+2xdxddz = adyddy+ayd^3y$, tercera diferencial.

La diferencial de $\frac{adzddx}{dx^2} + \frac{ydy}{a} - dy = 0$, en el supuesto de ser constante la dy es $\frac{adzd^3x}{dx^2} + \frac{addzddx}{dx^2} - \frac{2adzddx^2}{dx^3} + \frac{dy^2}{a} = 0$. La diferencial de $2a^3yddy - x^3dz^2 - x^2dzdx = a^2dy^2 - \frac{a^3dy^2ddy}{dz^2}$, en el supuesto de ser constante la dz, es $2a^3dyddy+2a^3yd^3y - 2xdxdz^2 - 2xdx^2dz - x^2dzddx = 2a^2dyddy - \frac{2a^3dyddy^2}{dz^2} - \frac{a^3dy^2d^3y}{dz^2}$.

De las diferenciales logarítmicas.

638 Si en la linea indefinita AN se toman ácia la derecha las partes AC, CE, EG, GI, &c. y ácia la izquierda las partes AC', $C'E'$, $E'G'$, &c. todas iguales unas con otras, y en los puntos G', E',
72. C', A, C, E, G, I, &c. se tiran á la AN las perpendiculares $G'H'$, $E'F'$, $C'D'$, AB, CD, EF, GH, IK, &c. que formen una progresion geométrica, y representen los números, siendo AB la unidad; las lineas AC, AE, AG, AI, &c. formarán una progresion arismética, expresarán las distancias respectivas á que cada término CD, EF, GH, &c. de la progresion geométrica estará de la unidad, ó primer término AB, ó (I.333) serán los logaritmos de cada término de la progresion geométrica. Y así como AG es tripla de AC, el número GH ocupará

rá el tercer lugar despues de la unidad AB, con Fig.
tál que CD ocupe el primero, LM ocupará el quinto lugar; por ser $AL = 5AC$. 72.

639. La curva que pasa por los extremos H', F', D', B, D, F, H, &c. de las lineas que forman la progresion geométrica, y representan los números, se llama la *logarítmica*, cuyas abscisas AC, AE, &c. son los logaritmos de las ordenadas correspondientes.

640 Si suponemos que la abscisa AP crece la cantidad infinitamente pequeña Pp, y que en el punto p se tire la ordenada pm, y la linea Mr para- 73.
lela á la abscisa AP, será mr la diferencial de PM. Por consiguiente si llamamos AP, x; PM, y, será $mr = dy$, y $Pp = Mr = dx$.

Pero como dx es la diferencial del logaritmo x de la ordenada ó número, sacarémos la diferencial del logaritmo, ó de una cantidad logarítmica, con sacar el valor de dx en la curva logarítmica.

Con esta mira supondrémos que por el punto M se ha tirado á la logarítmica la tangente MT, que intercepta en la linea de las abscisas la porcion TP, llamada *subtangente*; resultarán de aquí dos triángulos semejantes TPM, Mrm, pues ambos son rectángulos el uno en P, y el otro en r, y por ser paralelas PM y pm el ángulo exterior PMT es igual al interior rmM (I.372). Luego si llamamos A la subtangente PT, tendrémos $mr : rM :: MP : A$; luego $A \times mr = MP \times rM$, y $Mr = \frac{A \times mr}{MP}$, ó $dx = \frac{A \times dy}{y}$; luego *la diferencial de un logaritmo es igual á la diferencial de su número multiplicada por la subtangente de la logarítmica, y dividido el producto por el mismo número.*

641 De la equacion $dx = \frac{A \times dy}{y}$ se infiere que

el

el valor de la diferencial logarítmica pende del valor de la subtangente A, la qual es por lo mismo el módulo de los logaritmos que se sacan por este medio. Quando $A=1$, los logaritmos que da este supuesto se llaman hyperbólicos (436).

642 De la misma equacion $dx=\frac{A\times dy}{y}$ se saca estotra $\frac{ydx}{dy}=A$, que es la equacion de la logarítmica. Quanto vamos á decir de las diferenciales logarítmicas debe entenderse en el supuesto de ser $A=1$.

643 Luego *la diferencial del logaritmo de un número es igual á la diferencial del número dividida por el mismo número.*

Luego $dL(a+x)=\frac{dx}{a+x}$; $dL(1+x)=\frac{dx}{1+x}$; $dL(a-x)=\frac{-dx}{a-x}$: $dL(f+gx)=\frac{gdx}{f+gx}$. $dL.x^n=\frac{nx^{n-1}dx}{x^n}=nx^{-1}dx=\frac{ndx}{x}$. $dL\left(\frac{a+x}{a-x}\right)=dL(a+x)-dL(a-x)$; pero $dL(a+x)=\frac{dx}{a+x}$, y $dL(a-x)=\frac{-dx}{a-x}$. Luego $dL\left(\frac{a+x}{a-x}\right)=\frac{dx}{a+x}-\frac{dx}{a-x}=\frac{adx-xdx-adx-xdx}{a^2-x^2}=\frac{-2xdx}{a^2-x^2}$. La diferencial de $L\sqrt{(a^2+x^2)}=dL(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$ será la diferencial de $(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$ partida por $(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$; pero $d(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{2xdx}{2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$

$=\frac{xdx}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$; luego la diferencial del radical $\sqrt{(a^2+x^2)}=\frac{xdx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}\times\frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)}}\times\frac{xdx}{a^2+x^2}$.

644 Con igual facilidad se diferencian las cantidades que llevan logaritmos, como esta xlx, y las que se le parecen.

Pa-

Para sacar su diferencial se consideran separadamente los factores de que se supone que constan; xlx v. gr. se considera $= x \times lx$. Luego $d \,.\, xlx = dx \,.\, lx + x \,.\, d \,.\, lx$ (527); pero $d \,.\, lx = \frac{dx}{x}$; luego $d \,.\, xlx = dx \,.\, lx + \frac{x \,.\, dx}{x} = dx \,.\, lx + dx$.

Para hallar la diferencial de $(lx)^n$, harémos $lx = p$, y será $\frac{dx}{x} = dp$, y $(lx)^n = p^n$; luego $d(lx)^n = d \,.\, p^n = np^{n-1}dp = n(lx)^{n-1}\frac{dx}{x}$.

Para hallar la diferencial de $L.lx$, que es el logaritmo del logaritmo de x, harémos $lx = p$, y será $L.lx = lp$; ya que $d(lx) = \frac{dx}{x} = dp$; será $d.L.lx = dlp = \frac{dp}{p} = \frac{dx}{xlx}$.

645 Con igual facilidad se hallan las diferenciales superiores de las cantidades logarítmicas, como lo manifestamos aquí.

Si $y = lx$	si $y = xlx$
$dy = \frac{dx}{x}$	$dy = dx \,.\, lx + dx$
$ddy = \frac{-dx^2}{x^2}$	$d^2y = \frac{dx^2}{x}$
$d^3y = \frac{2dx^3}{x^3}$	$d^3y = \frac{-dx^3}{x^2}$

646 Cantidades exponenciales llamamos las potencias de cantidades constantes ó variables cuyo exponente es variable; a^x, y^x v. gr. son cantidades exponenciales. Las hay de varios grados; las de primer grado son aquellas cuyos exponentes son una cantidad variable, como las que dexamos apuntadas; las de segundo grado son las que tienen por exponente otra cantidad exponencial, qual es esta a^{x^y}.

Si se me ofrece hallar la diferencial de a^x, haré

Fig. $a^x = z$, y será $lz = la^x$, y diferenciando sacaré $\frac{dz}{z} = dx \cdot la$, ó $dz = zdx \cdot la = a^x dx \cdot la = d \cdot a^x$. De aquí se saca que la diferencial de a^x es el producto de la misma cantidad por el log. de a, y la diferencial de su exponente.

Si he de diferenciar y^x, en cuya cantidad la raiz y el exponente son ambos variables, haré $y^x = z$, con lo que será $d \cdot y^x = dz$. Pero $xly = lz$, de cuya equacion la diferencial es $dx \cdot ly + \frac{xdy}{y} = \frac{dz}{z}$; luego $dz = zdx \cdot ly + \frac{xzdy}{y} = y^x dx \cdot ly + \frac{y^x xdy}{y} = y^x\left(dx \cdot ly + \frac{xdy}{y}\right)$.

647 Quando en la cantidad exponencial a^x sea a la base logarítmica, que llamarémos c, será $l \cdot c = 1$ (426); luego $d \cdot c^x = c^x dx \cdot lc = c^x dx$. Esto quiere decir que la diferencial de esta exponencial particular es igual á la misma exponencial multiplicada por la diferencial de su exponente.

Diferenciales de los arcos de círculo, y de las líneas trigonométricas.

648 Sea el arco $AB = u$, su seno $BD = y$, su coseno $CD = x$, y el radio $CA = a$, y supongamos que al arco BA se le agrega el incremento
74. $EB = \Delta u$, su seno BD será entonces EF. Desde B tírese á EF la perpendicular BG, será $EG = \Delta y$, y será $FD = -\Delta x$, porque el coseno que era CD quando el seno era BD, es $CF = CD - DF$ así que el seno llega á ser EF. En llegando á expresar Δu, Δy, $-\Delta x$ el límite de la razon entre las cantidades cuyas son, sus expresiones serán du, dy, $-dx$, y entonces el arco EB se confunde con su tangente, y pue-

puede considerarse como una linea recta. Fig.

649 Tírese el radio CB, y será recto el ángulo EBC; si de cada ángulo recto EBC, GBD se resta el ángulo GBC, las restas, ó los ángulos EBG, CBD serán iguales, y pues los ángulos en G y D son rectos, los triángulos EGB, CBD serán semejantes; luego será $CD : CB :: EG : EB$, ó $x : a :: dy : du = \frac{ady}{x} = \frac{ad.\,\text{sen}\,u}{\cos u}$.

650 Luego 1.° $du = \frac{ad\,\text{sen}\,u}{\cos u}$, y 2.° $d\,\text{sen}\,u = \frac{\cos\,udu}{a}$, esto es 1.° *la diferencial del arco es igual al producto de la diferencial de su seno multiplicada por el radio, partido el producto por su coseno.* 74.

2.° *La diferencial del seno de un arco es igual al producto de la diferencial del arco multiplicada por el coseno, partido el producto por el radio.*

651 De los triángulos semejantes CDB, EGB tambien se saca $BD : CB :: GB : EB$, ó $y : a :: -dx : du = \frac{-adx}{y} = \frac{-ad.\cos u}{\text{sen}\,u}$.

Luego 1.° $du = \frac{-ad.\cos u}{\text{sen}\,u}$, y 2.° $d\cos u = \frac{-du\,\text{sen}\,u}{a}$, esto es, 1.° *la diferencial del arco es igual al producto de la diferencial del coseno tomado negativamente multiplicada por el radio, partido por el seno.*

2.° *La diferencial del coseno de un arco es igual al producto de la diferencial del arco tomada negativamente multiplicada por el seno, partida por el radio.*

652 Si llamamos tang. la tangente del arco $AB = u$, los triángulos semejantes CGB, CAH darán $CG : GB :: CA : AH$, ó $x : y :: a : \text{tang}\,u = \frac{ay}{x}$. Luego $\text{tang}\,u = \frac{a\,\text{sen}\,u}{\cos u}$. 75.

Si diferenciamos esta última equacion por la re-

Fig. gla dada (530), y substituimos en lugar de $d.\text{sen}\,u$ y $d.\cos u$ sus valores poco ha sacados, saldrá $d.\text{tang}\,u = \frac{a\cos^2 udu + a\,\text{sen}^2 udu}{(\cos u)^2}$; pero $\frac{\text{sen}^2 udu}{\cos^2 u} = \frac{\text{tang}^2 udu}{a^2}$, y de $t = \frac{ay}{x}$ se saca $\frac{t^2}{a^2} = \frac{y^2}{x^2}$, será $\frac{a\,\text{sen}^2 udu}{\cos^2 u} = \frac{a\,\text{tang}^2 udu}{aa}$; luego dt ó $d\,\text{tang}\,u = adu + \frac{a\,\text{tang}^2 udu}{aa} =$
75. $adu + \frac{\text{tang}^2 udu}{a^2} = \frac{a^2du + \text{tang}^2 udu}{a^2}$; luego $dt = \frac{a^2du + \text{tang}^2 udu}{a^2}$. y $a^2dt = a^2du + \text{tang}^2 udu$; de donde por último sale $du = \frac{a^2 d\,\text{tang}\,u}{a^2 + \text{tang}^2 u} = \frac{a^2 d\,\text{tang}\,u}{\sec^2 u}$, porque el triángulo rectángulo CAH dá $(CH)^2 = (CA)^2 + (AH)^2$, ó $\sec^2 u = a^2 + \text{tang}^2 u$. Luego $du = \frac{a^2 d\,\text{tang}\,u}{\sec^2 u}$, y $\frac{\sec^2 udu}{a^2} = d\,\text{tang}\,u$. Lo que significa

1.° Que *la diferencial del arco es igual al producto de la diferencial de su tangente multiplicada por el quadrado del radio, partido por el quadrado de la secante.*

2.° Que *la diferencial de la tangente del arco es igual al producto de la diferencial del mismo arco multiplicada por el quadrado de la secante, partido por el radio,* quadrado

653 Y porque los triángulos ACH, GCB dan $HC : BC :: AC : GC$, ó $\sec u : a :: a : \cos u$, $\sec u = \frac{aa}{\cos u}$ y $\sec^2 u = \frac{a^4}{\text{cosen}^2 u}$; luego con substituir, sale $d\,\text{tang}\,u = \frac{du \,.\, a^4}{a^2 \cos^2 u} = \frac{a^2du}{\cos^2 u}$, y quiere decir, que *la diferencial de la tangente es igual al producto de la diferencial del arco multiplicada por el* quadrado *del radio, partido por el quadrado del coseno.*

654 Porque los triángulos semejantes CDF, HAC dán $FD : DC :: CA : AH$, ó $\cot u : a :: a : \text{tang}\,u = \frac{aa}{\cot u}$, será, diferenciando, $d\,\text{tang}\,u = \frac{-a^2 \cot u}{\cot^2 u}$. Si substituimos estos valores en la equacion $du =$

ad

$\frac{ad \tang u}{\sec^2 u}$ hallada poco ha, será $du = \frac{-ad \cot u}{\cot^2 . \sec^2 u}$. Los Fig.
triángulos semejantes CDF, CAH dán $DF : CF ::$ $CA : CH$, ó $\cot u : \operatorname{cosec} u :: a : \sec u = \frac{a \operatorname{cosec} u}{\cot u}$; y $\sec^2 u = \frac{aa \operatorname{cosec}^2 u}{\cot^2 u}$; substituyendo este valor de $\sec^2 u$

en $du = \frac{-ad \cot u}{\cot^2 u \times \sec^2 u}$, saldrá $du = \frac{-ad \cot u}{\frac{\cot^2 u \,.\, a^2 \operatorname{cosec}^2 u}{\cot^2 u}} =$
$\frac{-ad \cot u}{\operatorname{cosec}^2 u}$, $d \cot u = \frac{-du \operatorname{cosec}^2 u}{a^2}$.

655 Luego 1.° *La diferencial del arco es igual al producto de la diferencial de la cotangente tomada negativamente multiplicada por el radio, y partido por el quadrado de la cosecante.*

2.° *La diferencial de la cotangente del arco es igual al producto de la diferencial del arco tomada negativamente multiplicada por el quadrado de la cosecante, partido por el radio.*

656 Como los triángulos semejantes BGC, CDF 75.
dán $BG : CB :: CD : CF$, ó sen : 1 :: 1 : cosec, será $\operatorname{cosec} u = \frac{1}{\operatorname{sen} u}$, y $\operatorname{cosec}^2 u = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u}$. Substituyendo este valor, sale $d \cot u = -du \operatorname{cosec}^2 u = \frac{-du}{\operatorname{sen}^2 u}$.

657 Los triángulos semejantes HAC, BEC dán $CH : CA :: CB : BE$, ó $\sec u : a :: a : \operatorname{cosen} u$, será $\operatorname{cosen} u = \frac{aa}{\sec u}$; luego $d \cos u = \frac{-a^2 \sec u}{\sec^2 u}$. Si substituimos este valor en la equacion de antes (551), $du = \frac{-ad \cos u}{\operatorname{sen} u}$, sacarémos $du = \frac{a^3 d \sec u}{\operatorname{sen} u \,.\, \sec^2 u}$, $du \operatorname{sen} u = \frac{a^3 d \sec u}{\sec^2 u}$; y como por lo probado poco ha $\sec^2 u = \frac{a^4}{\operatorname{cosen}^2 u}$, será $du \operatorname{sen} u = a^3 d \sec u \times \frac{\operatorname{cosen}^2 u}{a^4} = \frac{d \sec u \operatorname{cosen}^2 u}{a}$, y $du \operatorname{sen} u = \frac{d \sec u \operatorname{cosen}^2 u}{a}$, que dá $d \sec u = \frac{adu \operatorname{sen} u}{\operatorname{cosen}^2 u}$.

658 Ya que seno verso $u = GA - CG = a - \cos u$, 75.

será cos $u = a -$ sen verso u, y la diferencial del primer miembro será igual á la del segundo; luego $-\frac{\text{sen } udu}{a} = d(-\text{sen verso } u)$, y $\frac{\text{sen } udu}{a} = d$ sen verso u.

Luego *la diferencial del seno verso de un arco es igual á la diferencial del arco multiplicada por el seno, partido el producto por el radio.*

Aplicaciones del cálculo diferencial.

Aplicaciones del cálculo diferencial á las series.

659 I. La primer aplicacion que en este asunto harémos del cálculo diferencial, será averiguar la forma de y quando x llega á ser $x+dx$, en el supuesto de ser y funcion de x.

Si en lugar de x se substituye $x+dx$, la y se transformará en $y+dy$. Hagamos ahora constante la dx, quedándose variable la dy, y supongamos que x se convierta otra vez en $x+dx$, de modo que $x+dx$ sea $x+dx+dx = x+2dx$, la y se convertirá en $y+dy$, y la dy en $dy+ddy$, mediante lo qual $y+dy$ será $y+dy+y+ddy = y+2dy+ddy$. Si llega x á ser otra vez $x+dx$, de modo que $x+2dx$ sea $x+2dx+dx = x+3dx$, la y se transformará en $y+dy$, la dy en $dy+ddy$, y la ddy en $ddy+d^3y$, por manera que $y+dy+2ddy$, será $y+dy+2dy+2ddy+ddy+d^3y = y+3dy+3ddy+d^3y$. Por el mismo camino se hallarán los demas valores de y, los quales componen la tabla siguiente.

Va-

Valores de x.	Valores correspondientes de y.
x	y
$x+dx$	$y+dy$
$x+2dx$	$y+2dy+ddy$
$x+3dx$	$y+3dy+3ddy+d^3y$
$x+4dx$	$y+4dy+6ddy+4d^3y+d^4y$
$x+5dx$	$y+5dy+10ddy+10d^3y+5d^4y+d^5y$

660 Si se consideran los coeficientes de las columnas diferenciales, se echará de ver que son los números figurados, y que los coeficientes de la dy son múltiplos de la dx. Por consiguiente al formar la serie funcion de y, deberá tenerse presente que ndy corresponderá á ndx, siendo n el múltiplo que se quiera de la dx. Por lo demostrado (390 y 391) el término general de los coeficientes de la ddy habria de ser $\frac{n.(n+1)}{2}$; pero como á la columna de las ddy le falta al principio un término, en lugar de n se ha de substituir $n-1$, con lo que el término general será $\frac{n.(n-1)}{2}\,ddy$.

El término general de los coeficientes de d^3y habria de ser $\frac{n.(n+1).(n+2)}{2.3}$; pero como á la serie de las d^3y le faltan al principio dos términos, en lugar de n se habrá de substituir $n-2$, con lo que, el término general será $\frac{n.(n-1).(n-2)}{2.3}\,d^3y$. Y si, guiándonos por la misma consideracion, buscáramos los demas términos, sacarémos que á $x+ndx$ corresponde la siguiente serie

$y+ndy+\frac{n.(n-1)}{2}\,ddy+\frac{n.(n-1).(n-2)}{2.3}\,d^3y+\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{2.3.4}\,d^4y$ &c. Si suponemos infinito el número n, será ndx el producto del infinito por el infinitamente pequeño, y será ndx una cantidad finita que llamarémos b, esto es, $ndx=b$, $n=\frac{b}{dx}$,

$n^2 = \frac{b^2}{dx^2}$ &c. cuyos valores substituidos en la serie hallada poco ha, veremos que quando x llega á ser $x+b$, su funcion y es la serie siguiente:

$$y + \frac{bdy}{dx} + \frac{b^2d^2y}{2dx^2} + \frac{b^3d^3y}{2.3.dx^3} + \frac{b^4d^4y}{2.3.4.dx^4} + \&c.$$

661 Manifestemos con un exemplo la utilidad de esta expresion; para lo qual suponiendo $y = a+cx+x^2$, buscarémos el valor de y quando x llega á ser $x+2$.

La primer diferencial de la equacion propuesta es $dy = cdx + 2xdx$, y $\frac{dy}{dx} = c + 2x$. La segunda diferencial es $ddy = 2dx^2$, y $\frac{ddy}{dx^2} = 2$. No hay que buscar mas diferenciales, porque se desvanacen; luego y será $y + \frac{bdy}{dx} + \frac{b^2d^2y}{2dx^2} = y + 2c + 4x + 4 = a+cx+x^2+2c+4x+4$, cantidad que sale con substituir $x+2$ en lugar de x.

662 Escuso prevenir que si en lugar de x se substituyere $x-b$, la funcion y pasará á ser

$$y - \frac{bdy}{dx} + \frac{b^2d^2y}{2dx^2} - \frac{b^3d^3y}{2.3dx^3} + \frac{b^4d^4y}{2.3.4dx^4} + \&c.$$

con poner $-b$ en lugar de b en la serie de antes.

Si en lugar de x se substituyese $x-x$, el valor correspondiente de y será

$$y - \frac{xdy}{dx} + \frac{x^2d^2y}{2dx^2} - \frac{x^3d^3y}{2.3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{2.3.4dx^4} + \&c.$$

Pero como $x-x=0$, lo mismo sale de substituir en la equacion 0 en lugar de x, que de substituir $x-x$. Luego la última serie da el valor de x para el caso de hacer en su funcion $x=0$. Y como quando $x=0$ el valor de y es tambien cero, será $y - \frac{xdy}{dx} + \frac{x^2d^2y}{2dx^2} - \&c. = 0$. O si se hace $x=0$, el valor de y no será cero, sino igual á la cantidad A, y será $y - \frac{xdx}{dx} + \frac{x^2d^2y}{2dx^2} - \&c. = A$.

663 II. Supongamos que dada la suma y de la serie

rie $A+Px+Qx^2+Rx^3+$&c. queramos hallar el valor N de la misma serie, despues de multiplicados respectivamente sus términos por las constantes a, b, c &c. esto es la suma de la serie $Aa+Pbx+Qcx^2+Rex^3+$&c.

No podemos dar una solucion general de esta cuestion, porque no la hay; pero la resolverémos en algunos casos particulares.

Supongamos que los coeficientes a, b, c, e, f &c. forman una serie de números figurados, de los quales se toman las diferencias primeras, segundas, terceras, &c. hasta las últimas que serán constantes.

$b-a$, $c-b$, $e-c$, $f-e$ I.

$c-2b+a$, $e-2c+b$, $f-2e+c$ II.

$e-3c+3b-a$, $f-3e+3c-b$ &c. III.

Hagamos ahora $b-a=B$, $c-2b+a=C$, $e-3c+3b-a=D$, $f-4e+6c-4b+a=E$, será la suma

$$N=ay+\frac{Bxdy}{dx}+\frac{Cx^2d^2y}{2dx^2}+\frac{Dx^3d^3y}{2.3dx^3}+\frac{Ex^4d^4y}{2.3.4dx^4}+\&c.$$

en el supuesto de ser constante la dx. Porque

$$y=A+Px+Qx^2+Rx^3+Sx^4+\&c.$$

$$dy=Pdx+2Qxdx+3Rx^2dx+4Sx^3dx$$

$$d^2y=2Qdx^2+6Rxdx^2+12Sx^2dx^2$$

$$d^3y=6Rdx^3+24Sxdx^3$$

$$d^4y=24Sdx^4$$

Será, pues,

$$ay=Aa+aPx+aQx^2+aRx^3+aSx^4$$

$$\frac{Bxdy}{dx}=BPx+2BQx^2+3BRx^3+4BSx^4$$

$$\frac{Cx^2d^2y}{2dx^2}=CQx^2+3CRx^3+6CSx^4$$

$$\frac{Dx^3d^3y}{6dx^3}=DRx^3+4DSx^4$$

$$\frac{Ex^4d^4y}{24dx^4}=SEx^4$$

$$=N=Aa+Pbx+Qcx^2+Rex^3+Sfx^4$$

Si comparamos los términos homólogos unos con otros sacarémos $aP+BP=Pb$, ó $B=b-a$.

 Tam-

Tambien sacarémos $a + 2B + C = c$, esto es $C = c + a - 2b$; y del mismo modo sacarémos $D = e - 3c + 3b - a$ &c. Salen, pues, para B, C, D &c. los mismos valores que se les han dado en el supuesto hecho; luego es cierto que la suma $N = ay + \frac{Bxdy}{dx} + \frac{Cx^2 d^2y}{2dx^2} + \frac{Dx^3 d^3y}{2.3dx^3} +$ &c.

Si los números a, b, c fuesen los términos de una progresion arismética, sus diferencias segundas, terceras, &c. serian nulas; luego sería $C = 0$, $D = 0$ &c. y sería la suma $N = ay + \frac{Bxdy}{dx}$.

Si las diferencias segundas de a, b, c &c. fuesen constantes, las terceras serán nulas, entonces será la suma de la serie $N = ay + \frac{Bxdy}{dx} + \frac{Cx^2d^2y}{2dx^2}$.

Sabemos que la serie $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1}{1-x}$, cuyo quebrado es por lo mismo la suma de la serie. Multipliquemos sus términos respectivamente por los de esta progresion arismética $3, 5, 7, 9, 11$ &c. y busquemos la suma de la serie $3 + 5x + 7x^2 + 9x^3 + 11x^4$. Aquí $a = 3$, $b = 5$ y $b - a = B = 2$, pero $C = 0$ y $D = 0$. Como la suma de la serie propuesta $\frac{1}{1-x} = y$, será $dy = \frac{dx}{(1-x)^2}$, y $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Luego la suma que se busca será $N = ay + \frac{Bxdy}{dx} = \frac{a}{1-x} + \frac{2x}{(1-x)^2}$.

Aplicacion del cálculo diferencial á la doctrina de las lineas curvas.

664 Indagarémos primero como se ha de tirar una tangente á una curva qualquiera, dada que sea su equacion; esto nos dará á conocer el ángulo que la curva forma en el punto de contacto con su ordenada, ó con el exe de las abscisas, y por consiguiente ácia que lado es convexâ ó cóncava.

Pa-

Para tirar una tangente á una linea curva *AM*, se la considera como un polígono de una infinidad de lados infinitamente pequeños; la prolongacion *MT* de uno de sus lados *Mm* será su tangente, y la determinarémos respecto de cada punto *M* con calcular el valor de la subtangente *PT*, ó de la porcion de la linea en la qual se cuentan las abscisas, que coge desde la ordenada *PM* hasta el punto *T* de la tangente. Fig. 76.

Por lo que mira al valor de la subtangente, le calcularémos figurándonos tiradas por los dos extremos *M*, *m* del lado infinitamente pequeño *Mm* las dos ordenadas *MP*, *mp*, y por el punto *M* la linea *Mr* paralela á *AP*, exe de las abscisas. El triángulo infinitamente pequeño *Mrm* será semejante al triángulo finito *TPM*, y nos dará esta proporcion $rm : rM :: PM : PT$. Luego si llamamos *AP*, x; *PM*, y; *Pp* ó su igual *Mr* será dx, y *rm* será dy; tendrémos, pues, $dy : dx :: y : PT = \frac{ydx}{dy}$. Esta es la fórmula general para determinar la subtangente de toda curva, sea el que fuere el ángulo que las ordenadas forman con las abscisas; con tal que las ordenadas sean paralelas unas con otras.

Supongamos ahora, con el fin de aplicar la fórmula general, cifrada la naturaleza de la curva *AM* en una equacion que no tenga mas variables que x é y, y cantidades constantes. No habrá ni podrá haber en la tal equacion despues de diferenciada, sino términos multiplicados por dx, y términos multiplicados por dy; será, por consiguiente, facil sacar de ella despues de diferenciada el valor de $\frac{dx}{dy}$, en cuyo valor no habrá sino x, y, y constantes; substituido este valor en la fórmula $\frac{ydx}{dy}$ ó $y \times \frac{dx}{dy}$, nos dará el valor de la subtangente en x é y, y constantes. Final-

Fig. nalmente, substituyendo en lugar de y su valor expresado en x, sacado de la equacion de la misma curva, lo que saliere será la expresion de la subtangente solo en x y constantes; y para determinar el valor de la subtangente respecto de un punto M, solo
76. restará substituir en esta última expresion en lugar de x el valor de la abscisa AP, correspondiente al punto M.

665 Quando la equacion de la curva es tal, que creciendo $AP = x$, mengua y, la linea rM es $-dy$ (519), y la proporcion $rm : rM :: MP : PT$, que dá el valor general de la subtangente, es $-dy : dx$
77. $:: y : PT = -\frac{ydx}{dy}$, cuya expresion de ningun modo altera la práctica del método; solo está manifestando que la tangente en lugar de caer á la parte del origen A de las abscisas respecto de la ordenada PM, cae á la parte opuesta.

666 Si quisiésemos sacar una fórmula general para expresar la normal de una curva algebráica en el supuesto de ser sus ordenadas perpendiculares á las abscisas, la sacaríamos por medio de los triángulos semejantes mrM, QPM, los quales da-
76. rian $Mr : Mm :: MP : MQ$, esto es, $dx : \sqrt{(dx^2+dy^2)} :: y : MQ = \frac{y}{dx} \times \sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

La equacion de la parábola v. gr. dá despues de diferenciada, $2ydy = pdx$, $dy = \frac{pdx}{2y}$, $dy^2 = \frac{p^2dx^2}{4y^2}$; si substituimos este valor de dy^2 en $\frac{y}{dx} \times \sqrt{(dx^2+dy^2)}$, tendrémos $MQ = \frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2+\frac{ppdx^2}{4y^2})} = \frac{ydx}{dx}\sqrt{(\frac{4yy+pp}{4y^2})} = \frac{y}{2y}\sqrt{(4yy+pp)} = \frac{1}{2}\sqrt{(4px+pp)}$ (264).

De los mismos triángulos sacarémos la expresion de la subnormal PQ. Porque darán $Mr : rm$

::

$:: MP : PQ$; esto es, $dx : dy :: y : \frac{ydy}{dx} = PQ$. Fig.

Si hacemos aplicacion de esta fórmula á la equacion $y^2 = px$ de la parábola, sacarémos $dy = \frac{pdx}{2y}$; y substituyendo este valor de dy en $\frac{ydy}{dx}$, hallarémos que la subnormal de la parábola es $\frac{p}{2}$, ó la mitad del parámetro (273).

667 Cuestion 1. *Tirar por un punto* M *una tangente al círculo* AMB, *estando en* A *el origen de las abscisas, y el centro en* C.

Llamo a el diámetro AB; x, la abscisa AP; 78.
y, la ordenada PM; será con esto la equacion del círculo $yy = ax - xx$; y la diferencial de esta equacion será $2ydy = adx - 2xdx$, y $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a-2x} = \frac{y}{\frac{1}{2}x - x}$; luego $\frac{ydx}{dy} = \frac{y^2}{\frac{1}{2}a - x} = PT$.

Si el origen de las abscisas estuviera en C, la equacion del círculo sería (242) $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, y por consiguiente $\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{x}$; luego $\frac{ydx}{dy} = \frac{-y^2}{x} = -\frac{\frac{1}{4}aa - xx}{x}$, cuya equacion, por ser negativa, está diciendo que la subtangente, la qual en el caso antecedente pasaba por el origen de las abscisas, le dexa ahora del otro lado.

668 Cuestion 2. *Hallar el valor de la subtangente de la parábola cuya equacion es* $yy = px$.

Esta equacion despues de diferenciada es $2ydy = pdx$; luego $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$, $\frac{ydx}{dy} = \frac{2yy}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$, despues de substituir px en lugar de yy.

669 Cuestion 3. *Hallar el valor de la subtangente de la elipse* AMB, *cuya equacion es* $yy = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$ (291), *en el supuesto de ser* $AB = 2a$, *el semiexe menor* $= b$; $AP = x$; $PM = y$.

La diferencial de esta equacion es $2ydy =$ 79.
$\frac{bb}{aa}(2adx - 2xdx)$, ó $2aaydy = 2abbdx - 2bbxdx$,

de

Fig. de donde sacamos $\frac{dx}{dy} = \frac{2aay}{2abb-2bbx}$. Substituyo este valor en $\frac{ydx}{dy}$, y saco $\frac{ydx}{dy} = \frac{2aayy}{2abb-2bbx}$; substituyo finalmente en lugar de yy su valor $\frac{bb}{aa}(2ax-xx)$, y despues de executadas las reducciones correspondientes queda $\frac{ydx}{dy} = PT = \frac{2(2ax-xx)}{2a-2x} = \frac{2ax-xx}{a-x}$.

670 Cuestion 4. *Tirar una tangente al punto* M *de una hypérbola* AMH, *cuya equacion es* yy =
80. $\frac{bb}{aa}$(2ax+xx) (329), *siendo* 2a *su primer diámetro*; b, *la mitad del segundo*; AP, x, PM, y.

Despues de diferenciada esta equacion, será $2aaydy = 2abbdx + 2bbxdx$, luego $\frac{dx}{dy} = \frac{2aay}{2abb+2bbx}$, y $\frac{ydx}{dy} = \frac{2aayy}{2abb+2bbx}$; substituyendo en lugar de yy su valor $\frac{bb}{aa}(2ax+xx)$, y practicando las reducciones correspondientes saldrá $\frac{4ax+2xx}{2a+2x} = \frac{2ax+xx}{a+x} = PT$, y finalmente $AT = PT - AP = \frac{ax}{a+x}$.

671 Cuestion 5. *Hallar el valor de la subtangente*
81. *correspondiente al punto* M *de una hypérbola entre sus asymtotos*, *cuya equacion es* cc=xy (352), *en el supuesto de ser* AP=x; PM=y; cc = *la potencia de la hypérbola.*

La equacion $cc = xy$ es, despues de diferenciada $xdy + ydx = 0$; luego $\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}$, y por consiguiente $PT = \frac{ydx}{dy} = -x$; manifiesta este valor que la subtangente es igual á la abscisa correspondiente al punto *M*, pero que se ha de tomar á la parte opuesta del origen *A*.

De

Fig.

De los límites de las cantidades, y de las cuestiones de máximos y mínimos.

672 Expresa $\frac{dx}{dy}$ la tangente del ángulo que la curva causa con la ordenada en qualquiera de sus puntos; y $\frac{dy}{dx}$ expresa la tangente del ángulo que la curva causa con el exe de las abscisas.

Porque con suponer el radio de las tablas $= 1$, el triángulo rectángulo *Mrm* dá $rm : rM :: 1 :$ tang rmM (I.725); luego tang $rmM = \frac{rM}{rm} = \frac{dx}{dy}$. 76.
De lo dicho (325) tambien se inferirá que la tangente de un ángulo nulo, ó cuyo valor es cero, es tambien cero; luego siempre que el valor $\frac{dx}{dy}$ sea cero, no causará la tangente ángulo alguno con la ordenada; quiero decir, que la tangente será paralela á las ordenadas: de los mismos principios inferirémos que siempre que $\frac{dy}{dx} = 0$ no formará la tangente ángulo alguno con el exe de las abscisas; quiero decir, que la tangente será paralela al exe de las abscisas.

Pero como el valor de un quebrado es cero siempre que su numerador es cero, síguese que $\frac{dx}{dy} = 0$ siempre que $dx = 0$, y que quando $dy = 0$, tambien será $\frac{dy}{dx} = 0$; como dx es el numerador, y dy el denominador del quebrado $\frac{dx}{dy}$, hemos de inferir que la tangente de una curva es paralela á las ordenadas ó á las abscisas de la curva, conforme en el quebrado $\frac{dx}{dy}$ sea cero el numerador ó el denominador. Por consiguiente para manifestar en que punto ó puntos tiene una curva su tangente paralela á las ordenadas ó á las abscisas, se sacará de

su

Fig. su equacion diferenciada el valor de $\frac{dx}{dy}$, se hará el numerador igual con cero, y se sacará una equacion, la qual, comparada con la equacion de la curva, dará el valor de x é y correspondiente al punto de la curva, donde la tangente es paralela á las ordenadas. Si se supusiese $= 0$ el valor de dy ó del denominador del quebrado $\frac{dx}{dy}$, se sacaría otra equacion, la qual, combinada con la de la curva, dará los valores de x é y correspondientes al punto de la curva donde la tangente es paralela al exe de las abscisas.

673 Para aclararlo con un exemplo familiar, considerarémos la curva cuya equacion es $yy+xx = 2ay +2bx-aa-bb+rr$, que es la del circulo (239). Las lineas AP son x, y las lineas PM, PM' son los valores de y correspondientes á los valores de
82. x que dá la resolucion de la equacion. Si la diferenciamos, saldrá $2ydy + 2xdx = 2ady + 2bdx$, y $\frac{dx}{dy} = \frac{2y-2a}{2b-2x}$.

Supongamos primero igual con cero el numerador para averiguar en que puntos la tangente es paralela á las ordenadas. Tendrémos $2y-2a = 0$, é $y = a$: substituido este valor en la equacion de la curva dá $aa + xx = 2aa+2bx-aa-bb+rr$ ó $xx-2bx = rr-bb$, de cuya resolucion sale $x = b\pm r$, esto es, $x = AQ'$ y $x = AQ$; de lo qual se infiere que la curva ó su tangente es paralela á las ordenadas en dos puntos R y R' cada uno de los quales tiene una ordenada igual á la linea a.

Hagamos ahora igual con cero el denominador del valor de $\frac{dx}{dy}$, para saber en que puntos la curva ó su tangente es paralela á las abscisas; tendrémos $2b-2x = 0$, ó $x = b$. Si substituimos este valor en la equacion de la curva, saldrá $yy+bb = 2ay+2bb-$
aa

$aa - bb + rr$, ó $yy - 2ay = rr - aa$, de cuya resolucion Fig.
sacarémos $y = a \pm r$, y está diciendo esta expresion que la tangente es paralela á las abscisas en dos puntos T y T', que tienen comun la abscisa $AS = b$; sien- 82.
do $ST' = a + r$ la ordenada correspondiente al punto T', y la linea $ST = a - r$ la ordenada correspondiente al punto T.

674 Los puntos Q, Q' se llaman *los límites de las abscisas*, porque entre Q, Q' á cada abscisa AP corresponden dos valores reales de y, que son PM y PM'; pero entre Q y A, y mas allá de Q' respecto de A no hay punto alguno de la curva; por manera que si suponemos x menor que $AQ = b - r$, ó mayor que $AQ' = b + r$, no saldrá ningun valor real de y. El que quisiere comprobarlo no tiene mas que substituir en la equacion en lugar de x una cantidad $b - r - q$ menor que $b - r$, ó una cantidad $b + q + r$ mayor que $b + r$; resolver despues la equacion que salga de esta substitucion, y le saldrán imaginarios ambos valores de y.

Si nos figuramos tirada por el punto A la AL' paralela á las ordenadas, y tiramos por los puntos T, T' las lineas TL, $T'L'$ paralelas á las abscisas; las lineas $AL = ST = a - r$, y $AL' = ST' = a + r$ serán los límites de las ordenadas; porque se viene á los ojos que no puede haber ninguna ordenada mayor que AL', ni menor que AL en el caso de que la tangente haya de ser paralela á las abscisas. Y si en la equacion de la curva substituimos en lugar de y una cantidad menor que $a - r$, qual sería $a - r - q$, saldrán imaginarios los valores de x despues de resuelta la equacion. Lo propio sucedería si en lugar de y substituyéramos la cantidad $a + r + q$ mayor que $a + r$.

La ordenada ST' es la mayor de todas las que rematan en la concavidad $RT'R'$ de la circunferencia;

cia; la ordenada ST es la menor de todas las que rematan en la convexîdad; y las ordenadas QR, $Q'R'$ son á un tiempo las menores que rematan en la concavidad, y las mayores que rematan en la convexîdad.

675 De todo esto se sigue que por un mismo método se determinan 1.° los límites de las abscisas y de las ordenadas; 2.° los casos en que la tangente es paralela á las abscisas ó á las ordenadas; 3.° las máxîmas y mínimas abscisas, ú ordenadas.

676 Pero, sea la que fuere la expresion algebráica de una cantidad, se la puede considerar como que representa la ordenada de una linea curva. Sea v. gr. $\frac{x^2(a-x)}{aa}$ la expresion de una cantidad que llamo y, de modo que sea $y=\frac{x^2(a-x)}{aa}$; puedo considerar esta equacion como la de una linea curva, cuya abscisa es x y la ordenada y. En este supuesto es evidente que si la cantidad $\frac{x^2(a-x)}{aa}$ puede ser en algunos casos la máxîma ó la mínima entre las de su especie, ó llegar á ser un *máxîmo* ó un *mínimo*, se deberá practicar el método declarado; quiero decir, que se diferenciará la tal equacion, é igualará con cero el numerador ó el denominador de la fraccion que salga igual á $\frac{dx}{dy}$.

677 En esto consiste el método llamado de máxîmos y mínimos, á buen seguro uno de los mas socorridos del Analisis, y sirve *para averiguar qual es la máxîma ó la mínima de muchas cantidades que crecen ó menguan con arreglo á una misma ley*, ó, en general, *qual es la que tiene en mayor grado que otra qualquiera de todas sus semejantes, algunas propiedades determinadas.*

678 Con la mira de hacer mas perceptible toda-

davía la utilidad de este método, y segura su aplicacion, hemos de prevenir que de lo dicho (574) se infiere que una cantidad puede llegar por dos caminos distintos á ser la máxîma entre sus semejantes; quando empieza creciendo como *PM'*, y va despues menguando, ó quando empieza creciendo como *PM*, y de repente para en llegando á ser *QR*; pero en este último caso es á un tiempo la máxîma de todas las ordenadas que rematan en la convexîdad, y la mínima de todas las que rematan en la concavidad. Tambien son dos los caminos por donde puede llegar una cantidad á ser la mínima de sus semejantes; porque primero puede empezar menguando como *PM*, para crecer despues; ó primero mengua como *P'M'''*, y para de repente; en este último caso es á un tiempo un máxîmo y un mínimo; es un mínimo respecto de la rama *M'T'M'''*, y un máxîmo respecto de la rama *MTM.''*

679 Por consiguiente, el que quiera distinguir si una cantidad es un máxîmo ó un mínimo, ó uno y otro, ha de suponer que sea a el valor de x correspondiente al máxîmo ó al mínimo, y substituir succesivamente en la cantidad propuesta en lugar de x las cantidades $a+q$, a, $a-q$. Si la substitucion de las dos cantidades extremas diere cantidades menores que la substitucion de la cantidad media, la cantidad será un máxîmo; si diere cantidades mayores que la substitucion de la cantidad media, la cantidad será un mínimo; finalmente, si la substitucion del uno de los extremos da una cantidad real, y la substitucion del otro da una cantidad imaginaria, la cantidad será á un tiempo un máxîmo y un mínimo.

680 Quando al determinar un máxîmo ó un mínimo es tal el valor de la variable que hace negativo el valor del máxîmo ó mínimo, es señal de que

Fig. el máxîmo ó mínimo que representa no corresponde á la cuestion conforme viene propuesta, sí de que pertenece á otra cuestion con algunas circunstancias contrarias á las que incluía la cuestion que se resolvió.

Se me propone v. gr. que parta la linea AB en el punto C, con la circunstancia que el cociente del
83. quadrado de AC, dividido por BC sea el mínimo posible. Llamaré a la linea dada AB; x, la parte AC; la otra parte BC será $a-x$; y el cociente será $\frac{x^2}{a-x}$. La diferencial de esta cantidad ó de $x^2(a-x)^{-1}$ será $2xdx(a-x)^{-1}+x^2dx(a-x)^{-2}=0$, ó $\frac{2xdx}{a-1}+\frac{x^2dx}{(a-x)^2}=0$, ó $2axdx-x^2dx=0$, ó $(2a-x)x=0$, cuya equacion da $x=0$, ó $2a-x=0$. El primer valor da un mínimo que se conoce sin cálculo. El segundo valor da $x=2a$; substituido este valor en $\frac{x^2}{a-x}$, transforma la cantidad en $\frac{4a^2}{-a}=-4a$. Luego el mínimo no corresponde á la cuestion con las circunstancias expresadas; pero si considero con algun cuidado el valor $x=2a$, echo de ver que el punto C no puede estar entre A y B, y que la cuestion se podrá resolver quando sea circunstancia hallar el punto C en la AB, prolongada mas allá de B respecto de A. Si con esta condicion llamo AC', x; la distancia BC' ya no será $a-x$, sino $x-a$, y el cociente pedido será $\frac{x^2}{x-a}$, de cuya expresion la diferencial, igualada con cero, será $\frac{2xdx}{x-a}-\frac{x^2dx}{(x-a)^2}=0$, ó, despues de practicadas las reducciones correspondientes, $x^2dx-2axdx=0$, que da $x=2a$, como antes; y como la substitucion de esta cantidad en $\frac{x^2}{x-a}$ la transforma en $4a$, es señal de que corresponde un mínimo á este caso.

Si

Si igualo con cero el denominador $(x-a)^2$ de la diferencial, sacaré $x=a$, que representa un máxîmo conforme debe ser; porque quando $x=a$, la cantidad es infinita (495). No por eso le falta el caracter distintivo del máxîmo, porque supóngase x mayor ó menor que a, siempre sale una cantidad menor que si supongo $x=a$.

681 Siempre que én la expresion de una cantidad que ha de ser un máxîmo ó un mínimo hay algun multiplicador ó divisor constante, se le puede desechar antes de practicar la diferenciacion. Supongamos que $\frac{ay}{b}$ exprese en general una cantidad que ha de ser un máxîmo ó un mínimo, siendo a y b cantidades constantes; será preciso que $\frac{ady}{b}=0$, y una vez que ni a ni b son cero, es indispensable que sea $dy=0$. Por consiguiente el paradero del cálculo es el mismo que si sola y fuese la expresion de la cantidad que ha de ser un máxîmo ó un mínimo, el mismo que hubiera sido si antes de diferenciar se hubiese borrado el multiplicador a y el divisor b constantes. Luego lo propio será, para el caso, diferenciar sola la cantidad que ha de ser un máxîmo, que diferenciar uno de sus múltiplos, submúltiplos, ó alguna de sus potencias.

682 Cuestion 1. *Partir un número* a *en dos partes, con circunstancia que el producto de la una por la otra sea mayor que el producto de otras dos partes qualesquiera del mismo número.*

Llamo x la una de las dos partes, con lo que la otra es $a-x$, y el producto de ambas $ax-xx$; por lo dicho (476) será $y=ax-xx$, $dy=adx-2xdx$, y por consiguiente $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{a-2x}$. Si suponemos el numerador igual con cero, sacarémos $1=0$, absurdo manifiesto; si hay un máxîmo, le

 sa-

Fig. sacarémos igualando con cero el denominador. Hagámoslo, pues, y sacarémos $a-2x=0$, que dá $x=\frac{1}{2}a$, cuyo valor nos está diciendo que de qualquier modo que se parta en dos partes un número dado, el producto de ambas será el mayor, quando cada una de las dos partes sea la mitad del número propuesto.

683 Cuestion 2. *Determinar el rectángulo máxîmo que se pueda inscribir en un triángulo dado* ADC.

Sea b la base AC del triángulo; a, su altura BD;
84. x, la altura BE del rectángulo inscripto. Las paralelas AC, HI dan $BD : AC :: DE : HI$, ó, $a : b :: a-x : \frac{ba-bx}{a} = HI$. Por consiguiente la area del rectángulo $HI \times BE = \frac{bax-bx^2}{a} = \frac{b}{a}(ax-x^2)$. Diferenciando $ax-x^2$, y haciendo la diferencial igual con cero, sacarémos $x=\frac{1}{2}a$; cuyo valor manifiesta que el rectángulo máxîmo que se pueda inscribir en el triángulo es aquel cuya altura es la mitad de la altura del triángulo.

684 Cuestion 3. *Determinar entre muchos triángulos rectángulos, que tienen una misma hypotenusa dada, el de la máxîma superficie.*

Llamo la hypotenusa dada AC, a; AB, x; BC, y;
85. será $y=\sqrt{(a^2-x^2)}$, y por lo mismo $\frac{xy}{2}=\frac{x}{2}\sqrt{(a^2-x^2)}=$ la area del triángulo. Diferencio su quadrado $\frac{a^2x^2}{4}-\frac{x^4}{4}$, é igualando su diferencial $\frac{a^2xdx}{2}-x^3dx$ con cero, saco $x=a\sqrt{\frac{1}{2}}$, é $y=\sqrt{(a^2-x^2)}=a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

685 Cuestion 4. *Hallar entre todos los triángulos rectilineos rectángulos de una misma area, uno tal, que la suma de sus lados* AB+BC *sea la menor posible.*

85. Si llamo x el un lado AB; y el otro lado BC per-

perpendicular al primero; a, la area del triángulo; será $\frac{xy}{2} = a$, que da $y = \frac{2a}{x} = BC$. Luego la suma de los dos lados será $x + \frac{2a}{x}$; igualando con cero la diferencial $dx - \frac{2adx}{x^2}$ de esta suma, y reduciendo, saco $x = AB = \sqrt{2a}$, y $BC = \frac{2a}{x} = \sqrt{2a}$. Luego los dos lados serán iguales uno con otro.

686 Cuestion 5. *Determinar entre todos los paralelipípedos de una misma superficie y altura, quál es el de mayor cabida.*

Llamemos a la altura; cc, la superficie del paralelipípedo; x el uno, é y el otro, de los dos lados del rectángulo de la base. Toda la superficie se compone de seis rectángulos, entre los quales hay dos cuyo lado ó altura es a, y x la base; hay otros dos cuya altura es a, é y la base; finalmente hay otros dos cuya base es x, é y la altura. Por consiguiente la expresion de toda la superficie será $2ax + 2ay + 2xy$, esto es, $2ax + 2ay + 2xy = cc$. Por lo que mira á la solidez, sabemos que es axy; y como ha de ser la mayor de todas las de igual superficie, es preciso que su diferencial $axdy + aydx = 0$, ó que $xdy + ydx = 0$ (581). Pero de la equacion $2ax + 2ay + 2xy = cc$, la qual está diciendo que la superficie de todos estos paralelogramos es constante, sacamos $2adx + 2ady + 2xdy + 2ydx = 0$; luego si substituimos en esta equacion el valor de dx sacándole de la primera, hallarémos, despues de executadas todas las reducciones, $x = y$; luego la base ha de ser un quadrado.

Para determinar su lado, hemos de substituir en lugar de y su valor x en la equacion $2ax + 2ay + 2xy = cc$, la qual con esto se transforma en $4ax + 2x^2 = cc$, de cuya resolucion sacarémos $x = -a \pm$ $\sqrt{}$

Fig. $\sqrt{(aa+\frac{1}{2}cc)}$; y como la raiz negativa $-a-\sqrt{(aa+\frac{1}{2}cc)}$ no sirve para el caso actual, el valor que buscamos de x será $=-a+\sqrt{(aa+\frac{1}{2}cc)}$.

Si queremos averiguar qual ha de ser la altura a para que el paralelipípedo sea el de la solidez máxîma entre todos los de igual superficie, considerarémos que por ser a la altura, la base ha de ser un quadrado, la solidez será axx; es, pues, preciso que la diferencial de axx, en el supuesto de ser variables a y x, sea o; y por consiguiente $2axdx+xxda=0$, ó $2adx+xda=0$, dividiendo por x. Pero como la equacion $4ax+2x^2=cc$, que expresa la superficie, es entonces constante, dará, despues de diferenciada, $4adx+4xda+4xdx=0$; y con substituir en esta equacion en lugar de da su valor sacado de la equacion $2adx+xda=0$, saldrá, despues de executadas todas las reducciones, $x=a$; luego el paralelipípedo ha de ser un cubo, una vez que su lado ó altura a ha de ser igual al lado x del quadrado base suya.

En quanto al lado de este cubo, le hallarémos con substituir en lugar de a su valor x en la equacion $4ax+2x^2=cc$, la qual con esto se transforma en $4x^2+2x^2=cc$, ó $6x^2=cc$, y esta da $x=\sqrt{(\frac{cc}{6})}$. Luego entre todos los paralelipípedos de igual superficie, el de la solidez máxîma es el cubo cuyo lado es igual á la raiz quadrada de la sexta parte de la superficie.

687 Cuestion 6. *Determinar el cilindro máxîmo que se pueda inscribir en un cono dado.*

Llamemos a la altura BP del cono; b, el diámetro AC de su base; x, el diámetro $FG=DE$
86. del cilindro, considerándole como variable; p, la area de un círculo cuyo diámetro $=1$.

Ya que las areas de los círculos tienen unas con

con otras la misma razon que los quadrados de sus Fig. diámetros (I.580), será $1^2 : x^2 :: p : px^2 =$ la area del círculo *FIGL*. De los triángulos semejantes *APB*, *ADF* sacarémos *AP* : *BP* :: *AD* : *DF*, ó 86.
$\frac{1}{2}b : a :: \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}x : \frac{ab-ax}{b} = DF$, cuyo valor multiplicado por la area px^2 hallada poco ha, dará $\frac{pabx^2 - pax^3}{b}$, y será la expresion de la solidez del cilindro que ha de ser un máxîmo; harémos por lo mismo su diferencial $\frac{2pabxdx - 3apx^2dx}{b} = 0$, de donde sacarémos $x = \frac{2b}{3}$, y $DF = \frac{a}{3}$. Infiérese de aquí que el cilindro máxîmo inscripto en el cono dado es aquel cuya altura es un tercio de la altura del cono.

688 Cuestion 7. *Hallar las dimensiones de una medida cilíndrica tal, que con la menor superficie interior posible, tenga una cabida determinada, esto es, que quepa en ella una cantidad determinada de agua, trigo, &c.*

Llamemos x el diámetro *AB* de la medida; y, la 87.
altura *AD*; c, su cabida; p, la circunferencia de un círculo cuyo diámetro $= 1$. Harémos esta proporcion $1 : x :: p : px$, cuyo quarto término es la periferia de la base, y su producto por la altura y será la expresion de la superficie cóncava del cilindro. Si á esta le añadimos la superficie de la base, sacarémos toda la superficie interior del expresado cilindro. La superficie de la base la sacarémos multiplicando (I.556) la periferia px por $\frac{x}{4}$; luego $\frac{px^2}{4}$ será la expresion de la area de la base, cuyo producto por la altura y expresará la cabida de la medida; y como suponemos que c es la tal cabida, será $\frac{pyx^2}{4} = c$; luego la superficie cón-

Fig. cóncava $pxy = \frac{4c}{x}$. Por consiguiente toda la superficie interior de la medida será $\frac{4c}{x} + \frac{px^2}{4}$. Si igualamos su diferencial con cero, tendrémos $-\frac{4cdx}{x^2} + \frac{pxdx}{2} = 0$, $-8c + px^3 = 0$; y finalmente $x = \sqrt[3]{\frac{8c}{p}} = 2\sqrt[3]{\frac{c}{p}}$. Ya que $px^3 = 8c$, y $px^2y = 3c$, si dividimos la primera de estas dos equaciones por la segunda, saldrá $\frac{x}{y} = 2$; luego $x = 2y$, y por último será la medida qual se pide, siempre que el diámetro de su base sea duplo de su altura.

689 Cuestion 8. *Determinar entre todos los conos de una superficie dada, el que tiene la mayor solidez.*

Sea s la superficie dada; x, el semidiámetro AC
88. de la base; y, el lado obliquo AB; p, la periferia de un círculo cuyo diámetro $= 1$. Por estos supuestos la circunferencia de la base será $2px$; la area px^2, y la superficie convexâ del cono será pxy, esto es, la mitad del producto de la periferia de la base por el lado obliquo (I.637). Como toda la superficie $= px^2 + pxy = s$, será $y = \frac{s}{px} - x$; y por consiguiente la altura $CB = \sqrt{[(AB)^2 - (AC)^2]} = \sqrt{(\frac{s^2}{p^2x^2} - \frac{2s}{p})}$; multiplicado este valor por $\frac{px^2}{3}$, esto es, por el tercio de la area de la base (I.644), dará el producto $\frac{px^2}{3}\sqrt{(\frac{s^2}{p^2x^2} - \frac{2s}{p})}$, el qual será la expresion de la solidez del cono. Como ha de ser un máxîmo, lo será tambien su quadrado $\frac{s^2x^2}{9} - \frac{2psx^4}{9}$, cuya diferencial $\frac{2s^2xdx}{9} - \frac{8x^3psdx}{9} = 0$; de aquí sacarémos $4px^2 = s$, y por lo mismo $x =$

$\sqrt{}$

$\sqrt{\frac{s}{4p}}$. Para hallar el valor de y, considerarémos la Fig.
equacion hallada antes $y = \frac{s}{px} - x = \frac{s - px^2}{px} = \frac{3px^2}{px}$, con substituir en lugar de s su valor $4px^2$, sacándole de la equacion $s - 4px^2 = 0$; luego finalmente $y = 3x$. Todo esto manifiesta que el cono mayor entre todos los de una misma superficie dada, es aquel cuyo lado obliquo tiene con el semidiámetro de la base la misma razon que 3 con 1, pues de $y = 3x$ sale $y : x :: 3 : 1$.

De las evolutas y radios osculadores de las curvas.

690 Sea una curva qualquiera *BDF* cóncava ácia 89.
un mismo lado, envuelta con un hilo *BDF*, del qual el un extremo está fixo en *F*, y el otro tendido á lo largo de la tangente *AB*, y figurémonos que el extremo *A* se mueve, manteniéndose siempre tirante el hilo, y desenvolviendo mas y mas la curva *BDF*; en virtud de cuyo movimiento es constante que el extremo *A* del hilo trazará una linea curva *AHK*. La linea curva *BDF* se llama la *evoluta* de la curva *AHK*. Las porciones rectas *AB*, *HD*, *KE* del hilo *ABDF*, se llaman *radios de la evoluta*.

691 Quando el hilo remata en el extremo *B* de la evoluta, cada porcion *DH* del hilo es igual al arco evoluto *DB*; pero cada radio *HD* es mayor que el arco correspondiente *BD*, si empezando la evoluta desde *B*, el cabo del hilo llega hasta *A*, de modo que *AB* sea una linea recta. En general, el radio de la evoluta es igual al arco evoluto, añadiéndole una constante quando sea menester.

692 Cada radio *GC* de la evoluta, se puede considerar como la prolongacion del arco infinitamente pequeño *CD*, y este arco se puede conside-

rar

Fig. rar como una linea recta. Luego 1.° cada radio de la evoluta es tangente de la evoluta; 2.° al pasar el hilo de AC á GC traza un arco infinitamente pequeño AG, el qual se puede considerar como un arco pequeño circular, cuyo centro esté en C; por manera que el radio GC es perpendicular á la tangente en el punto G de la curva, que traza el extremo del hilo. Luego si desde los extremos A, G de un arco infinitamente pequeño de una curva se le tiran dos perpendiculares, estas perpendiculares se encontrarán en un punto C, el qual será uno de los puntos de la evoluta de la curva dada, y podrémos considerar el arco AG como un arco circular trazado desde el centro C. Pero como los círculos son tanto menos curvos, quanto mayores son sus radios, es patente que la curva que el hilo traza será tanto menos curva, quanto mas se aparte del punto A donde remata el radio de la evoluta que es cero, ó el menor de todos. Por consiguiente *la curvatura máxîma se hallará con determinar el radio mínimo de la evoluta.*

693 Si desde el centro D trazáramos un arco con un radio mayor que DG, este arco estaría fuera del arco GH, y si trazáramos el arco desde el mismo centro D con un radio menor que GD, este arco estaría dentro del arco GH; luego el círculo trazado desde el centro D con el radio GD es el que mas cabalmente se confunde con el arco infinitamente pequeño GH. A este círculo se le llama *círculo osculador*, y su radio se llama *radio osculador*, *radio de curvatura*, *radio de la evoluta.*

91. 694 Busquemos para la curva AMD, cuyas ordenadas PM son perpendiculares al exe AB, el valor del radio de la curvatura CM correspondiente al punto M, con el fin de trazar un círculo GM de igual curvatura en el punto M que la curva propuesta.

Ti-

Tiraremos la CG, Mr paralelas, y la AE perpendicular al exe AB; prolongarémos la MP hasta F, y tirarémos la mpf paralela é infinitamente próxîma á la MF; llamarémos la abscisa AP, x; PM, y; AM, u; MC, r; GE, b; AE ó PF, c; será $Mr = dx$, $mr = dy$, $Mm = du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; $CF = r - b - x$, y $GF = b + x$. Fig.

Esto sentado, de la naturaleza del círculo sacamos $GF \times (2GC - GF) = (FM)^2$, esto es, $2br - bb - 2bx + 2rx - xx = cc + 2cy + yy$; de cuya equacion la diferencial es $2rdx - 2bdx - 2xdx = 2cdy + 2ydy$, ó $rdx - bdx - xdx = cdy + ydy$; y la diferencial de esta es $rddx - bddx - dx^2 - xddx = cddy + dy^2 + yddy$; de donde sacarémos $(r - b - x)ddx - ddy(c + y) = dx^2 + dy^2 = du^2$. Pero los triángulos semejantes Mrm, MFC dan $Mm : mr :: MC : CF$, esto es, $du : dy :: r : CF = \frac{rdy}{du} = r - b - x$; y $Mm : Mr :: MC : MF$, esto es, $du : dx :: r : MF = \frac{rdx}{du} = c + y$. Si substituimos estos valores de $r - b - x$, y $c + y$ en la equacion $(r - b - x)ddx - ddy(c + y) = dx^2 + dy^2 = du^2$, sacarémos $\frac{rdyddx}{du} - \frac{rdxddy}{du} = du^2$, que da $r =$ 91.

$$\frac{du^3}{dyddx - dxddy} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy},$$ porque $du = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$.

Esta expresion general $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy}$ del radio de curvatura varía segun se supone constante la dx, la dy ó la du.

1.° Quando se hace constante la dx, sale $r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$.

2.°

2.° Quando se hace constante la dy, sale $r = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx}$.

3.° Quando se hace constante la du, sale $r = \frac{dy(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{ddx}$. Esto último necesita aclararse.

Si la du es constante, será $ddu = 0$. Diferenciemos la equacion $du^2 = dx^2+dy^2$, saldrá $2dxddx + 2dyddy = 2duddu = 0$; luego $2dyddy = -2dxddx$, y $ddy = \frac{-dxddx}{dy}$. Substituyamos este valor en el denominador de la expresion general $\frac{du^3}{dyddx-dxddy}$, y saldrá

$$\frac{du^3}{dyddx + \frac{dx^2ddx}{dy}} = \frac{du^3dy}{dy^2ddx+dx^2ddx} = \frac{du \times du^2 \times dy}{ddx(dx^2+dy^2)} = \frac{du \cdot dy(dx^2+dy^2)}{ddx(dx^2+dy^2)} = \frac{dudy}{ddx} = \frac{dy(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{ddx}.$$

695 Cuestion. *Hallar el valor del radio* R *de la evoluta de la parábola.*

En el supuesto de hacer constante la dx, la expresion general del radio de la evoluta es $R = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$. Si diferenciamos la equacion $yy = px$ de la parábola, sacarémos $2ydy = pdx$, y $dx = \frac{2ydy}{p}$, cuya expresion debe tenerse presente. Si diferenciamos la equacion diferencial $2ydy = pdx$ de la curva, haciendo constante la dx, sacarémos $2dy^2 + 2yddy = 0$, que da $ddy = -\frac{dy^2}{y}$, cuya expre-

presion debe tenerse presente. Luego $dy^2 + dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2} + dy^2 = \frac{4y^2dy^2+p^2dy^2}{p^2} = dy^2\left(\frac{4y^2+p^2}{p^2}\right)$. Si substituimos esta cantidad en lugar de su igual en la expresion general de R, saldrá $dy^{2\times\frac{3}{2}}\left(\frac{4y^2+p^2}{p^{2\times\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}}$ $= dy^3\frac{(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3}$. Esta cantidad se ha de partir ahora por $-dxddy$, cuyo producto, por los valores sacados poco ha de dx y ddy es $\frac{2ydy^3}{py}$, lo que es lo propio que multiplicarla por $\frac{py}{2ydy^3}$, saldrá pues $\frac{dy^3}{p^3}(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} \times \frac{py}{2ydy^3} = \frac{pydy^3}{2yp^3dy^3} \times (4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$.

Ahora bien; hemos visto (273) que la subnormal de la parábola $= \frac{p}{2}$; luego su normal que llamarémos $N = \sqrt{\left(y^2+\frac{p^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{4y^2+p^2}{4}\right)} = \frac{\sqrt{(4y^2+p^2)}}{2}$, esto es $\frac{\sqrt{(4y^2+p^2)}}{2} = N$, y $\sqrt{(4y^2+p^2)} = 2N$; y $(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} = 8N^3$; luego $R = \frac{(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2} = \frac{8N^3}{2p^2} = \frac{4N^3}{p^2} = \frac{N^3}{\frac{p^2}{4}}$. Esto quiere decir que *el radio osculador de la parábola es igual al cubo de su normal partido por el quadrado del semiparámetro.*

Como en el vértice de la parábola $y=0$, será $N = \frac{p}{2}$; luego en el vértice de la parábola el radio osculador es igual al semiparámetro.

696 Cuestion 2. *Hallar el radio osculador de la elipse.*

La

La equacion de la curva es $a^2y^2 = b^2(2ax - xx)$, diferenciémosla dos veces haciendo constante la dx, y la expresion general del radio será $R = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$; La primer diferenciacion da $2a^2ydy = 2ab^2dx - 2b^2xdx$, y la segunda $2a^2dy^2 + 2a^2yddy = -2b^2dx^2$, por ser $ddx = 0$. Como la primer diferencial da $dy = \frac{(ab^2 - b^2x)dx}{a^2y}$; será $dy^2 = \frac{(a^2b^4 - 2ab^4x + b^4x^2)dx^2}{a^4y^2}$, y por consiguiente. . . . .

$$(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}} = \left(dx^2 + \frac{(a^2b^4 - 2ab^4x + b^4x^2)dx^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(\frac{a^4y^2dx^2 + (a^2b^4 - 2ab^4x + b^4x^2)dx^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \ldots\ldots$$

$\frac{dx(a^4y^2+a^2b^4-2ab^4x+b^4x^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2y^2}$. La equacion de la elipse $a^2y^2 = 2ab^2x - b^2x^2$, multiplicada por a^2 da $a^4y^2 = 2a^3b^2x - a^2b^2x^2$; la misma equacion da tambien $y = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - xx)}$; si substituimos el valor de a^4y^2 en lugar del primer término del numerador de la última equacion, y el valor de y en su denominador, sacarémos $(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}} = \ldots\ldots$

$$\frac{dx(2a^3b^2x - a^2b^2x^2 + a^2b^4 - 2ab^4x + b^4x^2)^{\frac{1}{2}}}{ab\sqrt{(2ax - x^2)}} = \ldots\ldots$$

$$\frac{bdx(2a^3x - a^2x^2 + a^2b^2 - 2ab^2x + b^2x^2)^{\frac{1}{2}}}{ab\sqrt{(2ax - x^2)}} = \ldots\ldots$$

$\frac{dx(2a^3x - a^2x^2 + a^2b^2 - 2ab^2x + b^2x^2)^{\frac{1}{2}}}{a\sqrt{(2ax - x^2)}}$, esta expre-

sion

sion levantada á la tercer potencia, esto es, $(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}$ $= \frac{dx^3(2a^3b^2x - a^2bx^2 + a^2b^4 - 2ab^4x + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}} = A$, esta cantidad se ha de partir por $-dxddy$.

La segunda diferencial de la equacion de la curva da $ddy = \frac{-b^2dx^2 - a^2dy^2}{a^2y} = \frac{-b^2dx^2}{a^2y} - \frac{a^2 \times dy^2}{a^2y}$, en el segundo término substituirémos en lugar de dy^2 su valor sacado de la equacion $dy = \frac{(ab^2 - b^2x)\,dx}{a^2y}$, quadrándola, con lo qual será $ddy = \frac{-b^2dx^2}{a^2y}$ $- \frac{a^2}{a^2y} \times \frac{(a^2b^4 - 2ab^4x + b^4x^2)dx^2}{a^4y^2} = \frac{-b^2dx^2}{a^2y} -$ $\frac{(a^2b^4 - 2ab^4x + b^4x^2)dx^2}{a^4y^3} = \frac{(-a^2b^2y^2 - a^2b^4 + 2ab^4x - b^4x^2)dx^2}{a^4y^3}$, reduciéndolo todo á un mismo denominador. En el primer término del numerador substituirémos en lugar de $a^2b^2y^2$ su valor $2ab^4x - b^4x^2$, que da la equacion de la curva, y sacarémos $-a^2b^2y^2dx^2 -$ $(a^2b^4 + 2ab^4x - b^4x^2) \times dx^2 = -(2ab^4x - b^4x^2) \times dx^2 -$ $(a^2b^4 - 2ab^4x + b^4x^2) \times dx^2 = \frac{-a^2b^4dx}{a^4y^3}$, despues de borrar los términos que se destruyen. Pero por la equacion de la curva se saca $\frac{b^3}{a^3}(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}$, y

subs-

Fig. substituyendo este valor en vez de y^3, resulta

$$\frac{-a^2b^4dx^2}{a^4y^3} = \frac{-a^2b^4dx^2}{ab^3(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}} = ddy, \text{ y } -dxddy =$$

$$\frac{+a^2b^4dx^3}{ab^3(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{+abdx^3}{(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}.$$ Finalmente la expre-

sion *A* partida por $\frac{abdx^3}{(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}$, ó multiplicada

por $\frac{(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}{abdx^3}$ es. . . . .

$$\frac{dx^3(2a^3b^2x-a^2bx^2+a^2b^4-2ab^4x+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}{abdx^3}$$

$$= \frac{(2a^3b^2x-a^2bx^2+a^2b^4-2ab^4x+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b} = R.$$ Si introducimos en esta expresion la normal de la elipse, conforme introducimos antes (595) la normal de la parábola, hallarémos que el radio osculador de la elipse es igual al cubo de su normal partido por el quadrado del semiparámetro.

De los puntos de inflexìon.

697 Llamamos *punto de inflexìon* todo punto *M* v. gr. donde la concavidad de una curva se muda
92. en convexìdad. Para determinar estos puntos, podemos considerar que la tangente en *M* es á un tiempo tangente de las dos porciones *MA* y *MO*; en cuyo supuesto podemos investigar en cada lado del punto *M* dos elementos *Mm*, *Mm'* en linea recta, y por lo mismo el radio de la evoluta en el punto de inflexìon *M* será infinito, pues los radios de curvatura correspondientes á los puntos *m* y *m'* se-

serán ambos perpendiculares á la recta mm', serán paralelos, y solo se encontrarán á una distancia infinita. Pero como podemos suponer tan pequeños los expresados elementos, que ambos se desaparezcan, entónces el radio de la evoluta será cero. Fig.

Porque en el supuesto de que estén en linea recta los dos elementos de la curva inmediatos al punto de inflexîon, nada determina la longitud de los dos expresados elementos inmediatos. Y como aun quando se reduxeran ambos á un punto, no por eso dexarian de estar en una misma linea recta, las dos perpendiculares caerian entonces una sobre otra, y concurririan en el punto mismo de donde salen. Es- 92.
to es cabalmente lo que pasa en las curvas, cuyo radio de la evoluta es cero en el punto de inflexìon. Porque como entonces es infinita la curvatura, cada uno de los dos elementos inmediatos se confunde con la tangente infinitamente menos que en otro caso qualquiera, y por lo mismo los hemos de considerar como dos puntos que se confunden uno con otro. Pueden, pues, los dos èlementos estar en linea recta, sin que por eso el radio de la evoluta sea infinito; pero esto manifiesta que en el punto de inflexìon el radio de la evoluta siempre es infinito ó nulo.

698 Luego para hallar el punto de inflexìon, ó los puntos de inflexìon de una curva dada, acudirémos á la fórmula $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ del radio de curvatura. Pero para la inteligencia de las aplicaciones que de esta fórmula hemos de hacer aquí, prevenimos que por ser $(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(dx^2+dy^2)^3}$, hemos de considerar que están elevadas al cubo las cantidades que incluye el paréntesis; que el cubo

de dx^2 es dx^6 (48), y que la raiz quadrada de $(dx^2)^3$ ó de dx^6 es dx^3 (52). Por consiguiente si se nos ofreciese dividir por dx^2 el numerador de la fraccion $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ sin alterar su valor, será preciso dividir al mismo tiempo su denominador por dx^3 para hacer la compensacion correspondiente. Luego si dividimos el numerador de $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ por dx^2, y el denominador por dx^3, será $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$

$$= \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{-ddy}{dx^2}} = 0 \text{ ó } = \infty$$ en el punto de inflexîon.

Y como una fraccion es cero quando su numerador es cero, y es infinita quando su denominador es cero, síguese que en el punto de inflexîon el denominador $\frac{-ddy}{dx^2}$ del quebrado $\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{-ddy}{dx}}$ ha de ser $= 0$ ó $= \infty$.

699 La expresion $\frac{-ddy}{dx^2} = 0$ ó $= \infty$ está diciendo que para hallar el punto de inflexîon de una curva, se ha de diferenciar dos veces su equacion, haciendo constante la dx, con la mira de expresar con cantidades finitas el valor de $\frac{-ddy}{dx^2}$, é igualarle con cero ó con el infinito. De esta equacion, y de la equacion de la curva se inferirán los valores de x é y correspondientes al punto de inflexîon, ó á los puntos de inflexîon, quando la curva tenga muchos.

Cues-

700 Cuestion 1. *Hallar el punto de inflexìon de la curva* AFK, *cuyo diámetro es* AB ; *la abscisa* AE, x; *la ordenada* EF, y ; *y la equacion* axx = xxy + aay. Fig.

La equacion dá $y = \frac{axx}{xx+aa}$, y $dy = \frac{2a^3xdx}{(xx+aa)^2}$; la diferencial de esta equacion, haciendo constante la dx, es $ddy = \frac{2a^3dx^2(xx+aa)^2 - 8a^3xxdx^2(x^2+a^2)}{(xx+aa)^4}$; 93.
si lo partimos todo por $(xx+aa)$, executamos las operaciones indicadas, y lo partimos todo por dx^2, será $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2a^3xx+2a^5-8a^3xx}{(xx+aa)^3} = \frac{-6a^3xx+2a^5}{(xx+aa)^3}$. Hagamos esta cantidad igual con cero, será cero su numerador, y dará $3xx = a^2$, y $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Si en la equacion $y = \frac{axx}{xx+aa}$ substituyéramos en lugar de xx su valor $\frac{1}{3}aa$, saldría EF ó $y = \frac{1}{4}a$.

701 Cuestion 2. *Hallar el punto de inflexìon de la curva cuya equacion es* $y - a = (x-a)^{\frac{3}{5}}$.

La primer diferencial de esta equacion es $dy = \frac{3}{5}(x-a)^{-\frac{2}{5}}dx$; la segunda diferencial, haciendo constante la dx, es $ddy = -\frac{6}{25}(x-a)^{-\frac{7}{5}}dx^2$; luego $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-6}{25\sqrt[5]{[(x-a)]^7}}$. Si hacemos este valor $= 0$, saldrá $-6 = 0$, que nada dice; si le hacemos infinito, será el denominador $25\sqrt[5]{(x-a)^7} = 0$, de donde se saca $x = a$, porque toda potencia ó raiz de cero es cero.

DEL CALCULO INTEGRAL.

702 Así como la relacion que tienen unas con otras las cantidades variables nos proporciona hallar la que hay entre sus diferencias finitas ó infini-

nitamente pequeñas, tambien por la relacion que hay entre estas diferencias llegamos á conocer la relacion de las variables cuya son, unas con otras, cuyo modo de calcular se llama *cálculo integral*. Por lo que mira al cálculo diferencial, ya hemos visto como no tiene dificultad, por ser posible y aun facil diferenciar qualquiera cantidad variable, ó funcion suya, sea la que fuere. Pero en el cálculo integral se encuentran infinitos tropiezos, ofreciéndose otros tantos casos donde por la relacion de las diferenciales no es posible determinar la de las cantidades á que pertenecen.

703 Desde luego se infiere de lo dicho hasta aquí que para integrar las diferenciales de las variables, ó hallar estas por medio de aquellas, hay que hacer con la integracion lo contrario de lo que hizo la diferenciacion: del mismo modo que quando extrahemos una raiz determinada de un número seguimos un rumbo opuesto al que nos guia quando se le eleva á la potestad del grado que se le considera. Sabemos que no hay operacion mas facil que quadrar v. gr. una cantidad sea numérica sea literal; pero son infinitas las cantidades cuya raiz quadrada no se puede sacar cabal, porque no provienen de la multiplicacion de cantidad alguna por ella misma. Lo mismo sucede con las diferenciales, entre las quales hay infinitas que no es posible integrar, porque no provienen de la diferenciacion de ninguna cantidad, tal es esta xdy v. gr. porque ni la suma ni la diferencia, ni el producto, ni la division de las dos variables x é y da despues de diferenciada la expresion diferencial xdy.

704 Los cálculos diferencial é integral componen juntos el modo de calcular llamado *cálculo infinitesimal*; siendo, segun se ve, su primer parte el cálculo diferencial, y el cálculo integral la segunda. Encier-

ra este cálculo con las grandes dificultades que se ha empeñado en superar rasgos portentosos donde resplandece la sagacidad del entendimiento humano, y la constancia de los varones eminentes á cuya aplicacion debe sus adelantamientos.

705 Por lo mismo que el cálculo integral es el inverso del cálculo diferencial, las reglas para integrar las cantidades se han de inferir de los métodos declarados para diferenciarlas. Seguirémos, pues, este camino, declarando primero como se integran los monomios, y despues manifestarémos por que métodos se integran los binomios, y algunos polinomios.

706 Pero antes de todo prevendrémos que la integracion se señala, del mismo modo que la diferenciacion, con una señal particular, que es la letra *S* ó *ʃ* que significa *suma*, la qual se pone antes de la diferencial por integrar, v. gr. $S.dx$, $S(adx+bdy)$ señala respectivamente las integrales, ó las integraciones de las diferenciales dx y $adx+bdy$.

707 Esto supuesto, claro está que $S.dx = x$; $S.adx = ax$, $S.\frac{dx}{a} = \frac{x}{a}$, porque si diferenciamos x, ax, $\frac{x}{a}$, sacarémos respectivamente dx, adx, $\frac{dx}{a}$. De aquí se deduce para la integracion de los monomios, la siguiente

Regla fundamental. Para hallar la integral de una diferencial monomia, multiplicada ó dividida por una constante qualquiera, se toma la integral de la diferencial, sin atender á la constante, y se multiplica ó parte por la constante la integral que sale.

708 La integral de una diferencial monomia en que no hay mas que una variable x, multiplicada ó dividida por constantes qualesquiera, se saca por la siguiente

Regla general. 1.º Bórrese dx en la diferencial propuesta; 2.º añádase una unidad al exponente de la va-

riable; pártase lo que sale por el exponente despues de añadirle esta unidad; lo que se saque será la integral de la diferencial propuesta.

Luego si se me ofrece integrar la diferencial $ax^m dx$, siendo a cantidad constante, 1.° borraré dx, y quedará ax^m; 2.° añadiré una unidad al exponente m, y saldrá ax^{m+1}; 3.° partiré ax^{m+1} por $m+1$, y será $S.ax^m dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1}$.

Por la misma regla hallarémos que $S.mx^{m-1}dx = \frac{mx^{m-1+1}}{m-1+1} = x^m$. En esto no hay duda, porque qualquiera de las dos integrales que diferenciemos, sacarémos la diferencial á la qual corresponde. Si diferenciáramos $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$ v. gr. sacarémos $\frac{(m+1)ax^{m+1-1}dx}{m+1} = ax^m dx$.

709 De aquí se saca una señal que no puede errar para saber si la integracion está bien hecha. Diferénciese la integral hallada; su diferencial ha de ser igual con la propuesta si la integral sacada es la verdadera.

La regla dada (607) padece una excepcion que manifestarémos á su tiempo. Ahora vamos á aplicarla para integrar algunas diferenciales.

$S.2x^3dx = \frac{2x^4}{4} = \frac{x^4}{2}$.

Sea $\frac{dx}{x^m} = dy$, ó $x^{-m}dx = dy$; la integral será

x

$\frac{x^{-m+1}}{-m+1} = y$ ó $\frac{1}{(-m+1) \cdot x^{m-1}} = y$. Si $\frac{4adx}{x^4} = dy$, será $4ax^{-4}dx = dy$, cuya integral será $\frac{4ax^{-4+1}}{-4+1} = y$ ó $\frac{4ax^{-3}}{-3} = y$ ó $\frac{4a}{-3 \cdot x^3} = y$, y finalmente $\frac{-4a}{3x^3} = y$.

Sea $dx\sqrt[m]{x^n} = dy$; será $x^{\frac{n}{m}}dx = dy$, de cuya equacion la integral será $\frac{x^{\frac{n}{m}+1}}{\frac{n}{m}+1} = y$ ó $\frac{x^{\frac{n+m}{m}}}{\frac{n+m}{m}} = y$ ó $\frac{mx^{\frac{n+m}{m}}}{n+m} = y$, y finalmente $\frac{m\sqrt[m]{x^{n+m}}}{n+m} = y$,

$S.dx\sqrt{x} = S.x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2x^{\frac{1}{2}} \times x}{3} = \frac{2x\sqrt{x}}{3}$.

710 Si ocurriese integrar la equacion $dy = adx - bx^2dx\sqrt{x} + x^2dx + \frac{exdx}{x^2}$, se sacará la integral separadamente de cada término del segundo miembro, operacion facilísima despues de lo enseñado, y la integral de la equacion será $y = ax - \frac{bx^3\sqrt{x}}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{e}{2}$.

Como se completan las integrales.

711 Quando se diferencia alguna cantidad complexa que lleva algunos términos constantes, estos se

se desaparecen al tiempo de diferenciar (519). Pueden por lo mismo ocurrir muchos casos en que despues de sacada la integral de una cantidad, haya que añadirle, para completarla, alguna cantidad constante que la diferenciacion eliminó. El valor de esta constante que llamarémos C, siempre le determina la naturaleza de la cuestion que resuelve el calculador, ó dá á conocer que no hace falta. Para hallarla quando es preciso añadirla, se practicará la siguiente

Regla. *Para determinar la constante* C *que completa la integral, hágase igual con cero su variable* x, *y si la integral sale entonces igual cero, será señal de estar cabal; si despues de suponer* x = o, *quedare en la integral alguna constante, se añadirá esta constante, despues de mudarle el signo, á la integral sacada, la qual será entonces cabal.*

Vamos á probarlo. Sea v. gr. Q la integral completa quando x tiene un valor determinado, cuyo valor llamarémos a; y supongamos que siendo P la integral sacada por el cálculo, le falte para ser cabal la constante C cuyo valor no conocemos, por manera que sea $Q = P+C$. Supongamos ahora que despues de substituir en P, a en lugar de x, P se transforma en A; será $A+C$ el valor completo de la integral quando $x=a$; y como suponemos que la integral completa $= Q$, será $A+C = Q$, y $C = Q-A$.

712 Pero las mas de las veces no es dado ni puede serlo el valor completo Q de la integral; y es preciso indagar en que parte es cero su valor Q; porque quando $Q = 0$, $A+C = 0$, y $C = -A$; y en vez de suponer $x = a$, es mas comun y mas natural hacer $x = 0$.

713 Infiérese de aquí que si la integral es cero, no quando $x = 0$, sino quando x tiene algun valor

lor determinado y es v. gr. a, la constante es la misma integral que dá el cálculo, substituyendo a en lugar de x.

La integral de x^2dx v. gr. es $\frac{x^3}{3}$, la qual quando $x = a$ es $\frac{a^3}{3}$. Luego $Q = \frac{a^3}{3} + C$; y como en este caso $Q = 0$, será $\frac{a^3}{3} + C = 0$, y $C = -\frac{a^3}{3}$; luego la integral completa es $Q = \frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3}$.

Si $S. - x^n dx = -\frac{x^{n+1}}{n+1}$ es cero quando $x = a$, será $-\frac{x^{n+1}}{n+1} + C = 0$, y $C = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. Luego la integral completa, ó $Q = \frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{n+1}$.

Finalmente, si $S.xdx(c^3+bx^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{(c^3+bx^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}$ fuese cero quando $x = a$, sería $\frac{(c^3+ba^2)^{\frac{3}{2}}}{3b} + C = 0$; luego $C = -\frac{(c^3+ba^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}$, y $Q = \frac{(c^3+bx^2)^{\frac{3}{2}} - (c^3+ba^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}$.

714 Enseñémos como se integran las diferenciales de esta forma $dy = dx(a+x)^m$, siendo m un número qualquiera.

Hagamos $a+x = u$, y será $(a+x)^m = u^m$; la primera de estas dos equaciones despues de diferencia-

ciada es $dx = du$ (519); haciendo en $dy = dx(a+x)^m$ las correspondientes substituciones, saldrá $dy = u^m du$, cuya integral es $y = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C$. Restituyendo $a+x$ en lugar de u, la integral será $y = \frac{(a+x)^{m+1}}{m+1} + C$; y si quando $x = 0$ es $y = 0$, será $\frac{a^{m+1}}{m+1} + C = 0$, y $C = -\frac{a^{m+1}}{m+1}$. Por consiguiente siendo $m = 2$, la integral completa será $y = \frac{(a+x)^3}{3} - \frac{a^3}{3}$.

Apliquémos la integracion de esta fórmula general á un par de exemplos.

1.° Se nos propone, para integrarla, la equacion $dy = \frac{dx}{\sqrt{(a+x)}}$. Si la comparamos con la fórmula general $dy = dx(a+x)^m$, hallarémos que $m = -\frac{1}{2}$; luego la integral $y = \frac{(a+x)^{m+1}}{m+1} + C$ será $\frac{(a+x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{(a+x)} + C$.

2.° Si hubiésemos de integrar $dy = -dx\sqrt[3]{(a-x)^2} = -dx(a-x)^{\frac{2}{3}}$, será $m = \frac{2}{3}$; luego la integral será $y = -\frac{(a-x)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5}(a-x)^{\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5}(a+x)^{\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5}(a-x)^{\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{(a-x)^5} = -\frac{3}{5}(a-x)\sqrt[3]{(a-x)^2} + C$.

Pa-

Padece esta regla la misma excepcion que la de antes (607), acerca de la qual diremos en su lugar lo que corresponde.

715 Vamos á declarar ahora como se integran las diferenciales de esta forma $dy = x^p dx(a+bx^n)^m$.

Hagamos $a+bx^n = u$, y será $x^n = \frac{u-a}{b}$, $x = \left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n}\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} du = \frac{(u-a)^{\frac{1-n}{n}}}{n\sqrt[n]{b}}\, du$, y $x^p = \left(\frac{n-a}{b}\right)^{\frac{p}{n}}$. Luego $dy = x^p dx(a+bx^n)^m = \left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{p}{n}} \frac{(u-a)^{\frac{1-n}{u}}}{n\sqrt[n]{b}} u^m du = \frac{(u-a)^{\frac{p+1-n}{n}}}{nb^{\frac{p+1}{n}}} u^m du$, la integral de esta diferencial se podrá hallar siempre que el exponente $\frac{p+1-n}{n}$ ó $\frac{p+1}{n} - 1$ sea un número entero afirmativo ó negativo. Porque entónces todo estará en elevar $u - a$ á una potencia finita, y multiplicar todos sus términos por $u^m du$, é integrando cada uno de ellos, su suma ó diferencia dará la integral que se buscare. Claro está que $\frac{p+1}{n} - 1$ no puede ser número entero á no ser que $p + 1$ sea múltiplo de n. De donde inferirémos que toda diferencial de esta forma $x^p dx(a+bx^n)^m$ se puede integrar algebraica ó perfectamente siempre que el exponente p de x fuera del paréntesis aumentado una unidad, esto es $p+1$, sea múltiplo del exponente n que lleva x dentro del paréntesis.

Si el exponente $\frac{p+1}{n} - 1$ fuese un número entero negativo, la fórmula tendrá esta forma,

u

$\frac{u^m du}{nb^{\frac{p+1}{n}}(u-a)^q}$, haciendo $\frac{p+1}{n}-1=q$.

Quando $\frac{p+1}{n}-1$ sea un quebrado, ó quando el exponente n despues de añadirle la unidad, no sea un múltiplo de n, la integral solo podrá sacarse por aproxîmacion. Entónces se convierte en serie la potencia $(a+bx^n)^m$, cuyos términos se multiplican por $x^p dx$, se integran, y sale la integral en forma de serie, menos quando m es un número entero, en cuyo caso la cantidad $(a+bx^n)^m$ consta de un número finito de términos.

Hallemos por medio de nuestra fórmula la integral de $dy = x^3 dx\sqrt{(a^2-x^2)}$. De la comparacion de esta cantidad con $x^p dx(a+bx^n)^m$, sacamos que $p=3$, $n=2$, $m=\frac{1}{2}$, $a=a^2$, $b=-1$, y que $p+1=4$ duplo del exponente 2; luego la diferencial propuesta sufre integracion. Porque despues de substituidos en lugar de los exponentes indeterminados de la expresion $\frac{(u-a)^{\frac{p+1-n}{n}}u^m du}{nb^{\frac{p+1}{n}}}$ sus valores, saldrá $\frac{(u-a)^1 u^{\frac{1}{2}}du}{2}$

$=\frac{u^{\frac{3}{2}}du}{2}-\frac{a^2u^{\frac{1}{2}}du}{2}$, cuya integral es $\frac{u^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{a^2u^{\frac{3}{2}}}{3}+C$.

Pero como $u=a+bx^2=a^2-x^2=u$, será, con hacer la correspondiente substitucion, $S.x^3dx(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$ $=\frac{(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{a^2(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$.

Si hubiésemos de aplicar la fórmula para integrar

grar esta diferencial $\frac{xdx}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$, sería $p=1$, $n=2$, $m=-\frac{1}{2}$, $a=a^2$, $b=1$, y como $p+1=2$ y $n=2$, la cantidad propuesta sería integrable. Porque con hacer en $\frac{(u-a)^{\frac{p+1-n}{n}}u^m du}{nb^{\frac{p+1}{n}}}$ las correspondientes substituciones, saldría $\frac{(u-a)^0}{2}u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{du}{2u^{\frac{1}{2}}}$.

Pero $S.\frac{du}{2u^{\frac{1}{2}}} = u^{\frac{1}{2}} + C$, y $u = a^2 + x^2$; luego $S.\frac{xdx}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = \sqrt{(a^2+x^2)} + C$.

Si se ofreciera integrar $x^2dx(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$, tendríamos $p=2$, $n=2$, $m=\frac{1}{2}$, $a=a^2$, $b=1$. Aquí $p+1=3$ no es múltiplo del exponente $n=2$; luego la diferencial no se puede integrar por la fórmula (515). Es preciso transformar $(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$ en serie, y sale $(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5}$ &c. Será, pues, $x^2dx(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = ax^2dx + \frac{x^4dx}{2a} - \frac{x^6dx}{8a^3} + \frac{x^8dx}{16a^5}$ + &c. Integrando ahora separadamente cada término, saldrá $\frac{ax^3}{3} + \frac{x^5}{10a} - \frac{x^7}{56a^3} + \frac{x^9}{144a^5}$ + &c. $=$ $S.x^2dx(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$, próxîmamente.

En el caso de haber de integrar la diferencial $xdx(a^3-x^3)^2$, será $p=1$, $n=3$, $m=2$, &c. donde $p+1=2$ no es múltiplo del exponente $n=3$. La integracion no podrá hacerse por la fórmula; pero como el exponente $m=2$, número entero, se forma-

mará la potencia $(a^3-x^3)^2 = a^6-2a^3x^3+x^6$, y será $xdx(a^3-x^3)^2 = a^6xdx-2a^3x^4dx+x^7dx$, de cuya cantidad la integral es $\frac{a^6x^2}{2} - \frac{2a^3x^5}{5} + \frac{x^8}{8} = S.xdx(a^3-x^3)^2$.

Quando la potencia $(a+bx^n)^m$ esté multiplicada por un multinomio diferencial, como si se ofreciese integrar la cantidad $(x^pdx+x^qdx)(a+bx^n)^m$, la integracion se hará por partes. Se buscará primero la integral de $x^pdx(a+bx^n)^m$, y despues la de $x^qdx(a+bx^n)^m$, la suma de las dos integrales será la integral de la diferencial propuesta.

Integracion de las diferenciales trigonométricas.

716 El que tenga presente las diferenciales trigonométricas sacadas antes de ahora (540), en el supuesto de ser $= 1$ el radio que allí hicimos $= a$, echará de ver que

$S.du \times \cos u = \text{sen } u$	$S - du \times \text{sen } u = \cos u$
$S.\frac{du}{\cos^2 u} = \text{tang } u$	$S - \frac{du}{\text{sen}^2 u} = \cot u$
$S.\frac{du \times \text{sen } u}{\cos^2 u} = \sec u$	$S - \frac{du}{\text{sen}^2 u} = \text{cosec } u$
$S.du \times \text{sen } u = \text{sen vers } u$	$S - mdu \times \text{sen } mu = \cos mu$.

Integracion de las cantidades logarítmicas.

717 Al aplicar la regla fundamental de integracion, dexamos prevenido (607) que sale fallida, ó de nada sirve en algunos casos. No sirve con efecto la regla para integrar las diferenciales fraccionarias cuyo numerador es la diferencial del denominador, v. gr. esta $\frac{dx}{x}$, ó las de esta forma

x

$x^{-1}dx$. Porque integrada esta diferencial por la regla, sale $S.\frac{dx}{x} = \frac{x^0}{0} = \infty$, que de nada sirve.

718 Para apear esta dificultad recordarémos que $\frac{dx}{A} = \frac{dy}{y}$, ó que, integrando, $\frac{x}{A} = S.\frac{dy}{y}$, y porque x es el logaritmo de y tomado en la logarítmica cuya subtangente $= A$, podemos inferir por regla general que la integral de un quebrado cuyo numerador es la diferencial del denominador, es igual al logaritmo del denominador, dividido por la subtangente de la logarítmica, ó, lo que es lo mismo, por el módulo del sistema en que se toma.

Luego si fuese u el logaritmo de y en otra logarítmica cuya subtangente $= B$ tendrémos $\frac{dy}{y} = \frac{x}{A} = \frac{u}{B}$; por consiguiente $Bx = Au$, y $x : u :: A : B$, cuya proporcion está diciendo que los logaritmos de un mismo número tomados en distintas logarítmicas, ó en diferentes sistemas, son como las subtangentes de las logarítmicas, ó como los módulos de los sistemas, y por lo mismo es constante la razon de unos con otros, por ser cantidades constantes las tales tangentes ó módulos.

719 Luego $S-\frac{dx}{x} = -lx = l\frac{1}{x}$; como es facil de comprobar diferenciando $L\frac{1}{x}$ porque su diferencial es $d(\frac{1}{x})$ dividido por $\frac{1}{x}$, esto es $-\frac{dx}{x^2}$ dividida por $\frac{1}{x}$, de donde sale $-\frac{dx}{x}$. $S\frac{dx}{1+x} = L(1+x)$.

720 Para integrar $\frac{dx}{x.lx}$, harémos $lx = y$, que dará $\frac{dx}{x} = dy$, luego la propuesta será $\frac{dy}{y}$, cuya integral es ly; y poniendo en lugar de y su igual lx, será $S\frac{dx}{x.lx} = l.lx$.

Pa-

721 Para integrar $m(lx)^{m-1}\frac{dx}{x}$, tambien harémos $lx=y$, cuyo supuesto dará $\frac{dx}{x}=dy$, $(lx)^{m-1}=y^{m-1}$; luego $m(l.x)^{m-1}\frac{dx}{x}=my^{m-1}dy$; y como $Smy^{m-1}dy=y^m$, tambien $Sm(lx)^{m-1}\frac{dx}{x}=(lx)^m$, despues de substituir en lugar de y su valor lx.

722 Todo esto presupuesto, integrémos $\frac{dx}{a+x}$. Para executar esta integracion, la reducirémos á la de la diferencial $\frac{dx}{1+x}$, que por lo dicho últimamente es $l(1+x)$. Esta reduccion consiste en partir por a el numerador y denominador de $\frac{dx}{a+x}$, lo que

dará $\frac{\frac{dx}{a}}{1+\frac{x}{a}}$, donde $\frac{x}{a}$ está en lugar de x. Será,

pues, $S\frac{\frac{dx}{a}}{1+\frac{x}{a}}=S\frac{dx}{a+x}=l\left(1+\frac{x}{a}\right)=l\left(\frac{a+x}{a}\right)$.

723 Si hubiésemos de integrar $\frac{dx}{f+gx}$, harémos

$\frac{dx}{f+gx}=\frac{\frac{dx}{g}}{\frac{f}{g}+x}$, partiendo ambos términos del

primer miembro por g; pero $\frac{\frac{dx}{g}}{\frac{f}{g}+x}=\frac{dx}{g\left(\frac{f}{g}+x\right)}$,

cuya integral es $\frac{1}{g}l\left(\frac{f+gx}{g}\right)$, la misma que la de la diferencial propuesta.

724 Busquemos ahora el valor de $S.\frac{xdx}{a^2-x^2}$. Considerarémos que si diferenciamos a^2-x^2, y partimos la diferencial $-2xdx$ por -2, saldrá xdx; luego la funcion propuesta se puede considerar co-

mo multiplicada y partida por -2, con lo qual $\frac{xdx}{a^2-x^2}$ será $\frac{-2xdx}{-2(a^2-x^2)}$, de cuya diferencial la integral es $-\frac{1}{2}l\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)$.

725 La última funcion diferencial tambien se puede integrar por medio de las substituciones; con cuya mira harémos $a^2-x^2=u^2$, y será $-2xdx=2udu$, ó $-xdx=udu$; luego $\frac{xdx}{a^2-x^2}=-\frac{udu}{u^2}=-\frac{du}{u}$, cuya integral es $-l.u=-l(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$. Esta integral no discrepa de la primera porque $\frac{1}{2}l.a=l.a^{\frac{1}{2}}$; luego $-\frac{1}{2}l\frac{(a^2-x^2)}{a^2}=-l\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ $=-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{a}$. Pero como log. $1=0$, será $-\frac{l(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{a}=l.1-l\frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{a}=l\left(\frac{1}{\frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{a}}\right)$ $=l\left(\frac{a}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$. Será por consiguiente $S\frac{x^{n-1}dx}{a^m-x^n}$ $=ln\frac{a^{\frac{m}{n}}}{(a^m-x^n)^{\frac{1}{2}}}$, y $S\frac{x^{n-1}dx}{a^m+x^n}=\frac{l(a^m-x^n)^{\frac{1}{n}}}{a^m}$, conforme se comprobará integrando la funcion propuesta con hacer $a^m+x^n=u^n$.

726 Para integrar la funcion diferencial $\frac{2xdx+bdx}{a^2+x^2+bx}$, se considerará que el numerador es la diferencial del denominador, luego se integrará por logaritmos, con cuyo fin harémos $x^2+bx=y$; de donde saldrá $a^2+x^2+bx=y+a^2$, y $2xdx+bdx=dy$; lue-

go la funcion propuesta será $\frac{dy}{\frac{a^2+y}{a^2}}$; y como $S.\frac{dy}{\frac{a^2+y}{a^2}}$ $= l\frac{(a^2+y^2}{a^2}$; será $S.\frac{2xdx+bdx}{a^2+xx+bx} = l\frac{(a^2+x^2+bx)}{a^2}$.

727 Si se me propone, para integrarla, esta funcion $\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}$, haré $(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}} = y - x$, será, pues, $x^2+a^2 = y^2 - 2xy + x^2$, ó $a^2 = y^2 - 2xy$, $x = \frac{y}{2} - \frac{a^2}{2y}$, y $dx = \frac{dy}{2} + \frac{a^2dy}{2y^2} = \frac{dy(y^2+a^2)}{2y^2}$. Pero hemos hecho $(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}} = y - x = \frac{y}{2} + \frac{a^2}{2y} = \frac{y^2+a^2}{2y}$. Haciendo finalmente las substituciones correspondientes, será $\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2ydy(y^2+a^2)}{2y^2}$ $= \frac{dy}{y}$, cuya integral es ly. Pero $y = (x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}$ $+x$; luego $S.\frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}} = l(x+\sqrt{(x^2+a^2)})$.

728 Tambien integrarémos por medio de las substituciones la funcion $\frac{dx}{\sqrt{(2ax+x^2)}}$, haciendo $x = y - a$, con lo que será $x^2 = y^2 - 2ay + a^2$, $2ax = 2ay - 2a^2$; luego $2ax + x^2 = 2ay - 2a^2 + y^2 - 2ay - a^2 = y^2 - a^2$, y $\sqrt{(2ax+x^2)} = \sqrt{(y^2-a^2)}$; $dx = dy$. Por consiguiente $\frac{dx}{\sqrt{(ax+xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y^2-a^2)}}$, cuya integral es (627) $l(y+\sqrt{(y^2-a^2)}$; por lo que, $S.\frac{dx}{\sqrt{(2ax+xx)}} = l(x+a) + l\sqrt{(2ax+xx)}$ con substituir $x+a$ en lugar de y.

729 Para integrar la funcion $\frac{dx}{x\sqrt{(a^2+x^2)}}$, harémos $\frac{a}{x} = y$, ó $x = \frac{a}{y}$. Será, pues, $dx = \frac{-ady}{y^2}$, y por

por consiguiente $\frac{dx}{x\sqrt{(a^2+x^2)}} = \frac{-ady}{y^2 \times \frac{a}{y}\sqrt{\left(a^2+\frac{a^2}{y^2}\right)}}$

$= \frac{-ady}{y^2 \times \frac{a}{y}\,\frac{\sqrt{(a^2y^2+a^2)}}{y}} = \frac{-ady}{\frac{ay^2}{y^2}\sqrt{(a^2y^2+a^2)}} = \frac{-dy}{a\sqrt{(y^2+1)}}$

cuya integral es $-\frac{1}{a}l(y+\sqrt{(y^2+1)})$, y con hacer las substituciones correspondientes $S.\frac{dx}{x}\sqrt{(a^2+x^2)}$ $= -\frac{1}{a}l\left(\frac{a}{x}+\sqrt{\left(\frac{a^2}{x^2}+1\right)}\right) = -\frac{1}{a}l\left(\frac{a}{x}+\frac{\sqrt{(a^2+x^2)}}{x}\right) = -\frac{1}{a}l\left(a+\sqrt{(a^2+x^2)}-lx\right) = \frac{1}{a}l\left(\frac{x}{a+\sqrt{(a^2+x^2)}}\right)$.

730 Se me propone, para que la integre, la funcion $\frac{dx}{a^2-x^2}$. Reparo desde luego que por componerse su denominador a^2-x^2 del producto $(a+x)$ $\times(a-x)$, se la podrá convertir en dos fracciones, que serán $\frac{Adx}{a+x}+\frac{Bdx}{a-x}$, de lo que se sacará $\frac{(Aa-Ax+Ba+Bx)dx}{a^2-x^2} = \frac{dx}{a^2-x^2}$; como el denominador de la funcion propuesta no tiene x, serán $Bx-Ax$ del primer miembro de esta equacion $=0$; y por consiguiente $B=A$; y como el coeficiente de dx en el numerador de la propuesta es 1, será tambien $Aa+Ba=Aa+Aa=1$, y $A=\frac{1}{2a}=B$.

Luego $S.\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{S\frac{1}{2a}dx}{a+x} + \frac{S.\frac{1}{2a}dx}{a-x} = \frac{1}{2a}l\left(\frac{a+x}{a}\right)$ $-\frac{1}{2a}l\left(\frac{a-x}{a}\right) = \frac{1}{2a}l\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$.

Por el mismo camino se hallará que $S.\frac{dx}{x^2-a^2}$ $=\frac{1}{2a}l\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$.

731 En quanto á la integracion de las diferencia-

 les

les exponenciales, seguirémos un camino opuesto al que nos guió para diferenciarlas (546). Luego la integral de una diferencial exponencial, es la misma diferencial dividida por la diferencial de su logaritmo.

Porque una vez que la diferencial de c^x es (547) $c^x dx$, se sigue que $S.c^x dx$ es con efecto la c^x. La misma regla nos enseña que la integral de $x^y dylx + x^{y-1} ydx$ es x^y; porque la diferencial del logaritmo de x^y es $dy \times l.x + \frac{ydx}{x}$. Partiendo $x^y dylx + x^{y-1} ydx = x^y dylx + \frac{x^y ydx}{x}$ por $dylx + \frac{ydx}{x}$, sale el cociente x^y.

732 Todo lo dicha hasta aquí acerca de la integracion de las cantidades logarítmicas se reduce á las siguientes proposiciones.

1.° Las cantidades que se integran por logaritmos son todas aquellas diferenciales que son ó pueden ser una fraccion cuyo numerador es la diferencial del denominador sola, ó multiplicada ó dividida por un número constante.

2.° Aun quando el numerador no es la diferencial del denominador, multiplicada ó dividida por un número constante, se la resuelve ó es preciso resolverla en otros factores que el uno sea una fraccion cuyo numerador sea la diferencial cabal de su denominador, y el otro factor un número constante.

3.° Hay tambien muchas diferenciales que se integran por logaritmos, aunque no sea posible prepararlas como acabamos de decir. De esta clase son todas las diferenciales á las quales se puede dar la

for-

forma de diferenciales logarítmicas, multiplicándolas por una funcion de x, tal que el producto sea la diferencial de dicha funcion, ó la misma diferencial, multiplicada ó dividida por un número constante; si se divide despues lo que salga por la misma funcion, la diferencial será patentemente una diferencial logarítmica. Fig.

Integrales que se refieren al círculo.

733 Si llamamos a el diámetro del círculo cuyo arco es AM; AP, x; PM, y; y despues de tiradas la pm infinitamente próxîma á PM, y la Mr paralela á AC, llamamos el arco $AM = u$; será $Pp = Mr = dx$; $Mm = du$, y los triángulos semejantes CPM, Mrm darán $PM : CM :: Mr : Mm$; 94.

esto es, $\sqrt{(ax-xx)} : \frac{1}{2}a :: dx : du = \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$ (549)

será, pues, $S.\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$ el valor del arco AM.

Por consiguiente, si se nos ofrece hallar el valor de esta integral, quando x tiene un valor determinado, restarémos de $CA = \frac{1}{2}a$ el valor conocido de $x = AP$, y restará CP. Luego en el triángulo rectángulo CPM será conocido el ángulo recto, la hypotenusa $CM = \frac{1}{2}a$, y el lado CP; luego podremos valuar el ángulo ACM, ó sabiendo los grados del arco AM, será facil hallar su valor, ó quanto coge de largo tendido en plano, y sacarémos con facilidad el valor de la integral propuesta.

734 Supongamos ahora que b, g, p y k son cantidades conocidas, y se nos ofrece integrar esta diferencial $\frac{hdx}{\sqrt{(gkx-pxx)}}$; la reducirémos á la diferencial poco ha propuesta (633), para lo qual

 par-

partirémos desde luego el numerador y el denominador por $\sqrt{p}$, y sacarémos $\frac{\frac{h}{\sqrt{p}}dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x - xx\right)}}$ ó $\frac{h}{\sqrt{p}} \times \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x - xx\right)}}$; y si á la dx la multiplicase la mitad de $\frac{gk}{p}$, multiplicador de x en el radical, será esta diferencial parecida á la de antes. Harémos, pues, que lo sea, con cuya mira multiplicarémos y partirémos á un tiempo por $\frac{1}{2}\frac{gk}{p}$ ó $\frac{gk}{2p}$, de cuya operacion sacarémos $\frac{\frac{h}{\sqrt{p}}}{\frac{gk}{2p}} \times \frac{\frac{gk}{2p}dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x - xx\right)}}$ ó $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}} \times \frac{\frac{gk}{2p}dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x - xx\right)}}$. Puesta la diferencial en esta forma, se viene á los ojos que su integral es un arco de círculo, cuyo diámetro $= \frac{gk}{p}$, y la abscisa $= x$, multiplicado por $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}}$, será, pues, facil señalarla por lo dicho poco ha.

735 Si en vez de contarse las abscisas desde el punto A, se contasen desde el centro C, llamáramos b el radio CA, y x la abscisa CP, sacaríamos (549) $\frac{-bdx}{\sqrt{(bb-xx)}}$ elemento del arco AM. Esta expresion se saca de los triángulos semejantes CPM, Mrm, y teniendo presente que $PM = \sqrt{(bb-xx)}$, y que pues AM mengua al paso que $CP = x$ crece, la diferencial ha de ser negativa (518). Luego siempre que ocurra integrar una diferencial como esta $\frac{kdx}{\sqrt{(gh-pxx)}}$, se la trans-

for-

formará como antes en $\frac{k}{\sqrt{p}} \times \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{gh}{p} - xx\right)}}$, y en cuyo caso $\frac{gh}{p}$ substituye por bb, la cantidad $-b$ que ha de llevar el numerador es $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$, se multiplicará, pues, y dividirá por $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$, y saldrá $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \times \frac{-\sqrt{\frac{gh}{p}}\,dx}{\sqrt{\left(\frac{gh}{p} - xx\right)}}$. Luego con suponer $CA = \sqrt{\frac{gh}{p}}$, y $CP = x$, saldrá la integral $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \times AM$, ó $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \times AM + C$, ó $-\frac{k}{\sqrt{gh}} \times AM + C$.

736 De lo probado (552) consta que $\frac{aadx}{aa + xx}$ es la expresion de un arco de círculo cuyo radio $= a$, y la tangente $= x$. Este arco se valuará fácilmente siempre que tenga x un valor determinado, con calcular el ángulo ACN, y el arco AM' en sabiendo los grados del ángulo ACN, y conociendo el radio a.

Luego si la diferencial propuesta fuese $\frac{kdx}{gb^2 + hxx}$, partirémos por h el numerador y el denominador, y saldrá $\frac{k}{h} \times \frac{dx}{\frac{gb^2}{h} + xx}$, multiplicando despues ambos términos por $\frac{gb^2}{h}$, sacarémos $\frac{\frac{k}{h}}{\frac{gb^2}{h}} \times \frac{\frac{gb^2}{h}dx}{\frac{gb^2}{h} + xx}$, ó $\frac{k}{gb^2} \times \frac{\frac{gb^2 dx}{h}}{\frac{gb^2}{h} + xx}$, sería por lo mismo la integral el producto del arco cuya tangente

fuese $=x$, y el radio $\sqrt{\frac{gb^2}{h}}$ multiplicado por $\frac{h}{gb^2}$.

737 Manifiestan estas integraciones que á no ser conocido el radio del círculo cuyo arco es el valor de la integral que se busca, sería indeterminada esta integral, porque con radios diferentes se pueden trazar muchos arcos todos ellos de un mismo número de grados. Hace, pues, el radio del círculo papel de *módulo* para executar estas integraciones; y como las integrales que por este método se sacan, se expresan no en grados de arco, sí en el mismo arco tendido en plano, enseñarémos como esto se consigue.

738 Diximos, y no tardarémos en probarlo, que el radio de círculo se ha á la circunferencia como 1 á 3,1415926535, &c. Si llamamos R el radio, tendrémos esta proporcion 3,1415 &c. : 1 :: 180° : R $=$ 57,29577951 &c. grados, ó 57° 17′ 44″, con muy corta diferencia; luego en todo círculo el radio es igual á un arco de 57° 17′ 44″. En virtud de esto, siempre que sea dado un ángulo, podrémos averiguar quanto coge tendido en plano el arco que le mide, con tal que sea dado el radio. Porque se viene á los ojos que el arco de 57° 17′ 44″ es á la longitud del radio, ó al número de las partes que se le dan al radio, como el número de grados de otro ángulo qualquiera es á lo que coge tendido en plano el arco que le mide. Llamemos 57° 17′ 44″ ó 57,295779 &c. $=m$; N, el número de grados de un ángulo conocido, sea el que fuere; Z, lo que coge de largo tendido en plano el arco que le mide; R, el radio con el qual se traza este arco; la proporcion hecha poco ha será $m : N :: R : Z = \frac{N \times R}{m} = N \times R \times r$, suponiendo $\frac{1}{m} = \frac{1}{57,295779 \text{ \&c.}} = 0,0174532925$ &c. $= r$.

Apli-

Aplicaciones del cálculo integral.

739. Dexamos dicho (518) que de los dos métodos de calcular que componen el cálculo infinitesimal, es á saber el método de diferenciar y el método de integrar las cantidades, el asunto del primero es diferenciarlas, ó hallar sus diferencias infinitamente pequeñas, y el asunto del cálculo integral es integrar las diferenciales, ó sacar por medio de estas el valor de las cantidades mismas. Vienen, pues, á ser dos métodos, que el uno deshace lo que el otro hizo, habiendo entre ellos una como oposicion, ó tal correspondencia, que con el uno de los dos se prueban las operaciones del otro. Esto, que ya lo manifestamos quando declaramos las reglas de integrar las diferenciales, se acabará de hacer patente aquí donde la resolucion de las cuestiones las empezará el cálculo diferencial, y las concluirá el cálculo integral.

Aplicacion del cálculo integral á los logaritmos.

740 Cuestion I. *Hallar el logaritmo de un número* $\frac{n+x}{n}$.

Por lo dicho (540) la diferencial del logaritmo de $\frac{n+x}{n}$ es $M \times \frac{dx}{n+x}$, cuya diferencial con reducir á serie el quebrado, es $M \times \frac{dx}{n+x} =$

$$M \times \left(\frac{dx}{n} - \frac{xdx}{n^2} + \frac{x^2dx}{n^3} - \frac{x^3dx}{n^4} + \&c. \right).$$

Integrando esta equacion, saldrá Log. $\frac{n+x}{n} =$

$$M \times \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3} - \frac{x^4}{4n^4} + \&c. \right).$$

Si

Si x fuese negativa, los signos de todos los términos pares tendrian signos contrarios.

Quando $n=1$, log. $\frac{n+x}{n}$ sería log. $1+x=M\times\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\&c.\right)$ la misma serie que sacamos en otro lugar (435).

741 Cuestion 2. *Hallar el logaritmo de* $\frac{n+x}{n-x}$.

Sabemos que $d.\log.\left(\frac{n+x}{n-x}\right)=d.\log.(n+x)-d.\log.n-x=\frac{dx}{n+x}+\frac{dx}{n-x}=\frac{2ndx}{(n+x)\times(n-x)}=\frac{2ndx}{n^2-x^2}=2\left(\frac{dx}{n}+\frac{x^2dx}{n^3}+\frac{x^4dx}{n^5}+\frac{x^6dx}{n^7}\;\&c.\right)$. Luego integrando, $\log.\left(\frac{n+x}{n-x}\right)=2M\times\left(\frac{x}{n}+\frac{x^3}{3n^3}+\frac{x^5}{5n^5}+\frac{x^7}{7n^7}\&c.\right)$

Quando $n=1$, esta serie es la misma que sacamos en otro lugar, esto es $2M\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\&c.\right)$

Por esta serie se hallará el logaritmo de todo número mayor que la unidad; porque sea el que fuere el número, le harémos igual con $\frac{1+x}{1-x}$, de cuya equacion siempre se sacará para x un número menor que la unidad, con lo que la serie será muy convergente (440), cuya circunstancia importa mucho.

742 Manifestémoslo con buscar el logaritmo hiperbólico de 2: con cuya mira harémos $\frac{x+1}{x-1}=2$, y saldrá $x=\frac{1}{3}$; y como en el sistema de los logaritmos hiperbólicos $M=1$, será

$$\log.\,2=\left(\tfrac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot3^3}+\frac{1}{5\cdot3^5}+\frac{1}{7\cdot3^7}+\frac{1}{9\cdot3^9}+\&c.\right).$$

Los

Los términos de las series se sumarán reduciéndolos primero á decimales en la siguiente forma

$\frac{1}{3}$ . . . . $=0{,}3333333$

$\frac{1}{3 \cdot 3^3}=\frac{1}{3 \cdot 27}$ . . . . $=0{,}0123457$

$\frac{1}{5 \cdot 3^5}=\frac{1}{5 \cdot 243}$ . . . . $=0{,}0005830$

$\frac{1}{7 \cdot 3^7}=\frac{1}{7 \cdot 2187}$ . . . . $=0{,}0000653$

$\frac{1}{9 \cdot 3^9}=\frac{1}{9 \cdot 19683}$ . . . . $=0{,}0000056$

Suma de la serie. . . . . $=0{,}3465729$
Cuyo duplo $=$ log. 2 . . . . . $=0{,}6931458$

743 Los logaritmos de un mismo número x v.gr. sacados en sistemas de bases diferentes, estan unos con otros en razon invariable.

Sean v. gr. a, b las bases de dos sistemas diferentes; u é y los exponentes de las potencias, las quales son iguales con x, será $a^u = x$. $b^y = x$; luego $a^u = b^y$, y $ula = ylb$; luego $l.a : l.b :: y : u$. Pero como las bases a, b son invariables, lo son tambien sus logaritmos; luego es constante la razon entre u é y; quiero decir que permanece constantemente una misma la razon entre los logaritmos de un mismo número tomados en sistemas de bases diferentes.

El logaritmo tabular de 2 v. gr. es 0,3013300, y el logaritmo hiperbólico del mismo número es

0,

0,6931458; luego el logaritmo tabular de 2 es al logaritmo hiperbólico del mismo número, como 0,3010300 es á 0,6931458 :: 1 : 2,3025860.

Si llamamos, pues, T el logaritmo tabular de un número, y H su logaritmo hiperbólico, será $1 : 2,3025850 :: T : H = 2,302585T$; luego los logaritmos tabulares se pueden convertir en hiperbólicos, multiplicando aquellos por 2,302585.

Y porque de la misma proporcion se saca $T = \frac{H}{2,302585} = 0,43429$; para convertir el logaritmo hiperbólico de un número en logaritmo tabular, se ha de multiplicar aquel por 0,43429.

744 Cuestion 1. *Dado un logaritmo, hallar su número.*

Sea $1+x$ el número, y hagamos $y = 1+x$, la diferencia de su logaritmo será $dy = \frac{dx}{1+x}$, ó $dy + xdy - dx = 0$. Hagamos $x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 +$ &c., y diferenciemos; será $dx = Ady + 2Bydy + 3Cy^2dy + 4Dy^3dy +$ &c. Si hacemos las correspondientes substituciones, saldrá

$$\left.\begin{array}{l} dy + Aydy + By^2dy + Cy^3dy \\ -Ady - 2Bydy - 3Cy^2dy - 4Dy^3dy \end{array}\right\} = 0,$$

de cuya equacion sacarémos $A = 1$, $B = \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$, $C = \frac{B}{3} = \frac{1}{2.3}$, $D = \frac{C}{4} = \frac{1}{2.3.4}$. Luego el numero del logaritmo, ó $1 + x = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2.3} + \frac{y^4}{2.3.4} + \frac{y^5}{2.3.4.5} +$ &c.

Aplicacion del cálculo integral á la quadratura de las curvas.

745 Para valuar la superficie, ó, lo que es lo propio, para sacar la quadratura de las lineas curvas, las considerámos como polígonos de una infi-

finidad de lados, y desde los extremos *M*,*m* de cada lado nos figuramos tiradas las perpendiculares *MP*, *mp* al exe de las abscisas, mediante lo qual la superficie ó area está dividida en una infinidad de trapecios infinitamente pequeños. Consideramos despues cada trapecio *PpmM* como la diferencial del espacio finito *APM*; porque $PpmM = Apm - APM = d(APM)$ (518). Solo falta hallar la expresion algebráica del trapecio *PpmM*, ó la expresion de la diferencial $d(APM)$, é integrarla despues por las reglas dadas hasta aquí. Fig. 95.

Pero es de reparar que el trapecio *PpmM* que consideramos como la diferencial de la superficie contándola desde el orígen *A* de las abscisas, tambien puede ser la diferencial de otro espacio qualquiera *KPML*, contándole desde un punto fixo y señalado *K*, porque tambien $PpmM = KpmL - KPML = d(KPML)$. Por consiguiente la integral que se saque podrá expresar el espacio *APM*, y el espacio *KPML*, que discrepa del primero un espacio determinado y constante *KAL*. Será por lo mismo indispensable añadir á la integral una constante que exprese la diferencia que va del espacio que da la integral al espacio que queremos valuar. Con los exemplos darémos á conocer como esto se consigue; porque ahora nos ceñirémos á sacar la expresion del espacio *PpmM*.

Con esta mira llamarémos *AP*, x; *PM*, y; y 95. será $Pp = dx$, $rm = dy$. La superficie del trapecio *PpmM* (I. 553) es $\frac{Pm + pm}{2} \times Pp = \frac{2y + dy}{2} \times dx = ydx + \frac{dxdy}{2} = ydx$ (517); luego la expresion general de la diferencial de la superficie de una curva es ydx.

746 Quando se quiera aplicar esta fórmula á una superficie propuesta cuya equacion sea dada, se saca-

Fig. cará de la equacion de la figura el valor de y para substituirle en la fórmula ydx, cuya substitucion transformará la fórmula en una cantidad en que no habrá mas que x y dx; su integral, dado caso que se pueda conseguir, expresará, añadiéndole la competente constante, la superficie ó area de la curva, contándola desde el punto que se quiera. No habrá mas que determinar la constante, una vez señalado el punto desde el qual se ha de contar la superficie.

Quando las ordenadas, bien que paralelas unas á otras, no forman un ángulo recto con las abscisas, resulta para la quadratura una fórmula algo diferente de la que acabamos de sacar.

747 Pero respecto de las curvas cuyas ordenadas todas salen de un centro comun, se supone dividida su area en triángulos, no en trapecios, cuyo supuesto causa alguna variedad en la fórmula general de la quadratura. Para valuar v. gr. la superficie del
96. sector CNQ, nos le figurarémos dividido en una infinidad de triángulos infinitamente pequeños, como CQq. Si desde el punto Q baxamos á Cq la perpendicular Qt, ó, lo que es lo propio, si desde el centro C, y con el radio CQ trazamos el arco Qt, la expresion del triángulo CQq será $\frac{Cq \times Qt}{2}$. Luego con llamar CQ, y; y el arco Qt, dx, será $Cq = y + dy$, y por consiguiente el triángulo $CQq = \frac{y+dy}{2} \times dx = \frac{ydx + dxdy}{2} = \frac{ydx}{2}$ (517). De la equacion de la curva se sacará el valor de y expresado en x, se le substituirá en la fórmula general $\frac{ydx}{2}$, en la qual, hecha esta substitucion, se integrará.

748 Cuestion 1. *Quadrar el triángulo* ABC.
97. Llamo a la altura AD del triángulo; b, su base BC; AP, x; y, la ordenada Mm paralela á la ba-

base. Si tiramos otra ordenada Nn infinitamente Fig. próxîma á la primera, el elemento, ó la diferencial de la area será $ydx = MNnm$, por ser $Pp = dx$. Pero los triángulos semejantes ABC, AMm dan $AD : BC :: AP : Mm$, ó $a : b :: x : y = \frac{bx}{a}$; luego $ydx = \frac{bxdx}{a}$, y $S.ydx = \frac{bx^2}{2a}$. Por consiguiente si fuese $x = a$, será $\frac{bx^2}{2a} = \frac{ba^2}{2a} = \frac{ba}{2}$ la expresion de la superficie de todo el triángulo. Esto es lo mismo que dexamos demostrado en los principios de Geometría.

749 Cuestion 2. *Quadrar la parábola cuya equacion es* $y^2 = px$.

La equacion de la curva da $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$; luego $ydx = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$; la integral de esta cantidad 95. es $\frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx}{\frac{3}{2} dx} + C$, ó $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$, esta será la expresion de la superficie de la parábola; por manera que una vez que conozcamos la abscisa x y el parámetro p, conocerémos el valor del espacio APM, ó del espacio $KPML$ contado desde un punto determinado K, como esté determinada la constante C; esto es, como la integral exprese desde que punto se cuenta.

Supongamos desde luego que los espacios se cuentan desde el punto A, en cuyo supuesto $APM = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$. Para averiguar el valor de C, á fin de que se verifique esta equacion, considerarémos que quando $x = 0$, el espacio APM es tambien cero, y entonces la equacion es $0 = 0 + C$; luego $C = 0$; luego para que la integral exprese los espacios contados desde el punto A, es preciso que la constante C sea cero, quiero decir que entonces no hay que añadir constante alguna, y en general el espacio indeterminado $APM = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$.

Pe-

Fig. Pero si suponemos que los espacios se cuentan desde el punto K, de modo que siendo b una cantidad conocida, sea $AK = b$, en este supuesto será $KPML = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$. Estos espacios llegan á ser cero quando $AP = x = b$; luego entonces $0 = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$; $C = -\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}$, y por último $KPML = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}$.

Repárese que $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \times x$; como $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$; se verificará $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$, ó $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \times x = \frac{2}{3} xy$; luego ya que $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$ es la expresion del espacio APM, tambien será $APM = \frac{2}{3} xy = \frac{2}{3} AP \times PM$, esto es, los dos tercios del rectángulo $APMO$, sea la que fuere AP.

Tambien $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \times b$; pero quando $x = AK = b$, la equacion $yy = px$ es $yy = pb$, y por consiguiente $y = p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$, esto es $KL = p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$; luego $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}$, ó $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \times b = \frac{2}{3} KL \times AK$; luego ya que $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}$ es el valor del espacio $KPML$, el mismo espacio tambien será $\frac{2}{3} AP \times PM - \frac{2}{3} AK \times KL$, esto es, $\frac{2}{3} APMO - \frac{2}{3} AKLI$.

750 Cuestion 3. *Quadrar el sector de círculo* ACB.

98. Llamo a el radio $AC = BC$; x, el arco AB, considerándole como variable; por lo que BM será dx; luego el triángulo CBM será la diferencial de la area que se me pide, y su expresion será $\frac{adx}{2}$. Luego el area total será $S. \frac{adx}{2} = \frac{ax}{2} = AC \times \frac{1}{2} AB$. De aquí se sigue que la area de todo círculo es igual al producto de la mitad de su circunferencia por el radio (I. 556).

Cues-

751. Cuestion 4. *Quadrar la elipse.* Fig.

Llamo la BD, x; la DR, y; la CB, a; y la CE, b, con lo qual la equacion de la curva será $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, é $y = \frac{b}{a}(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{b}{a}x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(2a - x)}$. Luego la area $BDR = S.ydx$ será 100.
$S\frac{b}{a}x^{\frac{1}{2}}dx(2a - x)^{\frac{1}{2}}$.

Si comparamos esta expresion con la fórmula general $x^p dx(a + bx^n)^m$ (615) echarémos de ver que $p + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ no es múltiplo del exponente $n = 1$. Luego la diferencial propuesta solo es integrable por series y por aproxîmacion, motivo por que la elipse no sufre una quadratura cabal.

Ahora bien; $(2a - x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2a} - \frac{x}{2\sqrt{2a}} - \frac{x^2}{16a\sqrt{2a}} - \frac{x^3}{64a^2\sqrt{2a}} - \frac{5x^4}{1024a^3\sqrt{2a}}$ (416 y sig.);

luego $x^{\frac{1}{2}}dx\frac{b}{a}(2a - x)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}dx\frac{b}{a}\left(\sqrt{2a} - \frac{x}{2\sqrt{2a}} - \frac{x^2}{16a\sqrt{2a}} - \frac{x^3}{64a^2\sqrt{2a}} - \frac{5x^4}{1024a^3\sqrt{2a}}\right) = \frac{b}{a}\left(x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{2a} - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2\sqrt{2a}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{16a\sqrt{2a}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}dx}{64a^2\sqrt{2a}} - \frac{5x^{\frac{9}{2}}dx}{1024a^3\sqrt{2a}}\right)$

cuya integral es $\frac{b}{a}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{2a} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5\sqrt{2a}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7.8a\sqrt{2a}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{9.32a^2\sqrt{2a}} - \frac{5x^{\frac{11}{2}}}{11.512a^3\sqrt{2a}}\right)$ &c.

Si hacemos $DB = x = a$, expresará esta in-

Fig. tegral la area del quadrante elíptico BCE, cuyo valor será por lo mismo $\frac{b}{a}\left(\frac{2a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\sqrt{2}}{3} - \frac{a^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}}{5\sqrt{2}}\right.$

$$- \frac{a^{\frac{7}{2}-\frac{3}{2}}}{56\sqrt{2}} - \frac{a^{\frac{9}{2}-\frac{5}{2}}}{9.32\sqrt{2}} - \frac{5a^{\frac{11}{2}-\frac{7}{2}}}{11.512\sqrt{2}} \text{ \&c.} \Big) =$$

$$\frac{b}{a}\left(\frac{2a^2\sqrt{2}}{3} - \frac{a^2}{5\sqrt{2}} - \frac{a^2}{56\sqrt{2}} - \frac{a^2}{9.32\sqrt{2}} - \frac{5a^2}{11.512\sqrt{2}} \text{ \&c.}\right)$$

$$= ab\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{5\sqrt{2}} - \frac{1}{9.32\sqrt{2}} - \frac{5}{11.512\sqrt{2}} \text{ \&c.}\right)$$

Si multiplico arriba y abaxo por $\sqrt{2}$, el primer término de la serie $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ será $\frac{2.\sqrt{2}.\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\times2}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$, con lo que, la expresion general quedará reducida á $\frac{ba}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{56} - \frac{1}{288} - \frac{5}{5632} \text{ \&c.}\right)$ Finalmente, si se multiplica por 4 toda esta area, saldrá el valor de la area de toda la elipse.

752 Cuestion 5. *Quadrar el quadrante de círculo.*

El círculo es una elipse cuyos dos exes son iguales; luego si en el valor hallado del quadrante elíptico hacemos $b = a$, la area del quadrante circular será $= \frac{aa}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{56} - \frac{1}{288} - \frac{5}{5632} \text{ \&c.}\right)$ Luego la area del círculo es á la de la elipse $:: \frac{aa}{\sqrt{2}} : \frac{ab}{\sqrt{2}} :: a : b$, esto es, como el exe mayor al menor, quando el diámetro del círculo es igual al exe mayor de la elipse.

Por consiguiente, si el círculo se pudiera quadrar cabalmente, y llamáramos su area A, la area de la elipse será $= \frac{Ab}{a}$, y por lo mismo la quadratura de la elipse pende de la quadratura del círculo.

100. Ya que $CA = a$, será $2a$ el diámetro del círculo

lo *AGB*; y si suponemos $1 : \pi$ la razon entre el diámetro y la circunferencia, la circunferencia del círculo *AGB* será el quarto término de la siguiente proporcion $1 : \pi :: 2a : \pi 2a$, y la area del mismo círculo será $= \pi 2a \times \frac{a}{2} = \pi a^2$, y la llamarémos *C*. Luego por lo probado poco ha $a : b :: \pi a^2 : \pi ab =$ la area de la elipse, la qual es igual al rectángulo de los semiexes multiplicado por $\pi = 3.141$ &c.

Llamemos *R* el radio del círculo *AGB*; será $\pi a^2 = \pi RR$; y como πa^2, superficie del círculo cuyo radio $= a$, es igual á πab, superficie de la elipse cuyos semiexes son a y b, será $\pi RR = \pi ab$, ó $RR = ab$, y $R = \sqrt{ab}$. Luego la superficie de la elipse es igual á la superficie de un círculo cuyo radio es medio proporcional á los dos semiexes.

Por la naturaleza del círculo $DF = \sqrt{(2ax - xx)}$, y por la propiedad de la elipse $DR = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - xx)}$; luego $DF : DR :: \sqrt{(2ax - xx)} : \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - xx)} :: 1 : \frac{b}{a} :: a : b$. Esto supuesto,

Si desde un punto qualquiera *H* del exe de la elipse, se tiran las lineas *HR*, *HF* á las ordenadas *DR*, *DF*, que tienen comun la abscisa *BD*, los sectores *FHB*, *RHB* estarán en razon de *BC* á *CE*, ó de a á b. Porque segun probamos antes $BFD : BRD :: a : b$; y el triángulo FDH : triángulo $RDH :: a : b$. Luego $BFD : BRD :: FDH : RDH$; luego $BFD + FDH : BRD + RDH :: FBH : RHB$.

Si las abscisas se contasen desde el centro *C*, de modo que fuese $CD = x$, sería $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - xx)}$, y $RDCE = S.ydx = S.\frac{bdx}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$, cuya diferencial tampoco se puede integrar sino por series.

Fig.

Pero $\sqrt{(a^2-x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5}$ &c.

Luego $RDCE = S.\frac{bdx}{a}\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{b}{a}\left(ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \right.$ &c.) Si hacemos $x = a = CB$, tendrémos la quadratura del quadrante elíptico, cuya area es $= \frac{b}{a}\left(a^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{40} - \frac{a^2}{112}\right.$ &c.) $= ab\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112}\right.$ &c.)

753 Cuestion 6. *Quadrar la area hyperbólica*
101. ABD, *y el sector hyperbólico* CAD, *estando en* C *el centro, y en* A *el vértice principal de la curva, y el origen de las abscisas.*

Sea, pues, AB, x; BD, y; CA, a; su conjugado b; será por lo mismo (329) $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax+xx)$, $y = \frac{b}{a}(\sqrt{2ax+xx})$, y la area hyperbólica $= S.ydx = S.\frac{b}{a}dx\sqrt{(2ax+xx)} = S.\frac{b}{a}x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{(2a+x)}$, cuya diferencial solo por series puede integrarse. Pero $\sqrt{(2a+x)} = \sqrt{2a} +$

$$\frac{x}{2\sqrt{2a}} - \frac{x^2}{16a\sqrt{2a}} + \frac{x^3}{64a^2\sqrt{2a}} - \frac{5x^4}{1024a^3\sqrt{2a}} + \text{\&c.}$$

Luego $S.\frac{b}{a}x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{b}{a}S.\left(x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{2a} + \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2\sqrt{2a}} - \right.$

$$\left.\frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{16a\sqrt{2a}} + \frac{x^{\frac{7}{2}}dx}{64a^2\sqrt{2a}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}dx}{1024a^3\sqrt{2a}} + \text{\&c.}\right) =$$

$$\frac{b}{a}\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}\sqrt{2a}}{3} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5\sqrt{2a}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7.8a\sqrt{2a}} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{9.32a^2\sqrt{2a}} - \right.$$

$\frac{5x^{\frac{11}{2}}}{11.512a^3\sqrt{2a}} + \&c.\Big)$, cuya expresion, despues de practicar con $\sqrt{2a}$ lo mismo que antes, se reduce á $\frac{b}{\sqrt{2a}}\Big(\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{5a} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{188a^2} - \frac{5x^{\frac{11}{2}}}{5632a^3}\ \&c.\Big)$ Fig.

La area del sector CAB se hallará restando de la area del triángulo DBC la del espacio ABD.

754 Cuestion 7. *Quadrar la hypérbola equilátera entre sus asymtotos.*

Sea $xy = aa$ (352) la equacion de la hypérbola, siendo $AG = x$, $GH = y$. Si hacemos $aa = 1$, será $xy = 1$, $y = \frac{1}{x}$, y $S.ydx = S.\frac{dx}{x} = L.x$ (617). Será, pues, $L.x + C$ el valor de la area $EAGHMD$, la qual será $= 0$ quando $x = 0$. Por consiguiente en este caso la tal area será $L0 + C = 0$, y por lo mismo $C = -L.0$, y la area será $L.x - L.0 = L.\frac{x}{0}$ (I. 237). Luego si hacemos $x = AL = b$, el espacio $EALMD$ será infinito, considerando 0 como una cantidad infinitamente pequeña. 102.

Si contamos las abscisas desde el punto B, siendo $AB = 1$, y $aa = 1$, será $AG = 1 + x$, y $GH = \frac{1}{1+x}$ (I. 351). Luego será $ydx = \frac{dx}{1+x}$, y $S.ydx = S.\frac{dx}{1+x} = L.(1+x) = L.AG$. Todo esto manifiesta que los logaritmos hyperbólicos traen su origen de una hypérbola equilátera cuya potencia $= 1$. Si llamáramos aa la potencia de la hipérbola; AB, b; BG, x; GH, y, sacaríamos $CBGH = aaL(b+x) = L.AG \times aa$.

Claro está que entre unos mismos asymtotos se pueden trazar infinitas hypérbolas equiláteras, y que por tanto á una misma abscisa $b + x$ pueden cor-

Fig. responder infinitos espacios hyperbólicos ó logarítmicos. Si trazáramos v. gr. otra hypérbola chf, cuya potencia fuese cc, probaríamos, discurriendo como poco ha, que el espacio $BGhc$ sería en esta hypérbola el logaritmo de $b+x$, cuyo espacio $= ccL.(b+x)$; luego $BGHC : BGhc :: aaL.(b+x) : ccL.(b+x) :: aa:cc$. Luego los logaritmos de un mismo número tomados en distintas hypérbolas son como las potencias de las mismas hypérbolas.

Aplicacion del cálculo integral á la rectificacion de las curvas.

755 Rectificar una linea curva es determinar quanto coge de largo tendida en plano, ó averiguar con que linea recta es igual la curva. Esto se logra considerando la curva AM como un polígono de una infinidad de lados, y el pequeño lado Mm como la diferencial del arco AM, porque $Mm = Am - AM$
103. $= dAM$. Despues se tira Mr paralela á AP, con lo que $Mm = \sqrt{[(Mr)^2+(rm)^2]} = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$, y la integral de esta cantidad expresa el valor del arco AM. Para hallar esta integral, se diferencia la equacion de la curva, y despues de hallar con su auxîlio el valor de dx en y, y dy, ó el valor de dy en x y dx, se le substituye en $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, en cuya expresion ya no queda entónces mas que x y dx^2, ó y y dy^2, se saca dx^2 ó dy^2 fuera del radical, y se integra. Luego $S.\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ es la fórmula general para la rectificacion de las curvas.

756 Lo primero que haremos ahora será rectificar el círculo, ó un arco suyo. Hemos apuntado (548 y sig.) diferentes expresiones de la diferencial de un arco, segun sea la linea trigonométrica suya que se considera seno, coseno, tangente, &c. al tiempo de buscar la diferencial del arco; y en sabien-

biendo que parte de la circunferencia es el tal arco, Fig.
se hallará la rectificacion de toda ella. Claro está que conocido que sea el arco cuya diferencial expresa la fórmula, tambien por ésta se podrá sacar el valor de la linea trigonométrica que llevare. Por consiguiente, puede buscarse por varios caminos la rectificacion del círculo, así como para averiguar el valor de las lineas trigonométricas de un arco suyo, es preciso resolver varias cuestiones.

757 Cuestion I. *Dado que sea el seno de un arco* A, *hallar el valor del arco en potencias del mismo seno.*

Llamemos u el arco AR; x su seno BR; $CR =$ 99.
$R = 1$, con lo que la diferencial RE del arco será $du = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, ó $du = dx(1-xx)^{-\frac{1}{2}}$. Ya que $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{2.4} + \frac{3.5x^6}{2.4.6} + \frac{3.5.7x^8}{2.4.6.8}$ &c. será $du = dx + \frac{x^2dx}{2} + \frac{3x^4dx}{2.4} + \frac{3.5x^6dx}{2.4.6} + \frac{3.5.7x^8dx}{2.4.6.8}$ &c. de donde, integrando, sacarémos

$$u = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{3x^5}{2.4.5} + \frac{3.5x^7}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7x^9}{2.4.6.8.9} \text{ \&c.}$$

cuya expresion, despues de substituir A en lugar de u, y sen A en lugar de x, se convierte en

$$A = \text{sen } A + \frac{\text{sen}^3 A}{2.3} + \frac{3\text{sen}^5 A}{2.4.5} + \frac{3.5\text{sen}^7 A}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7\text{sen}^9 A}{2.4.6.8.9},$$

sácase de aquí que

$$A - \text{sen } A = \frac{\text{sen}^3 A}{2.3} + \frac{3\text{sen}^5 A}{2.4.5} + \frac{3.5\text{sen}^7 A}{2.4.6.7} + \text{\&c.}$$

cuya equacion está diciendo, que quando el arco es infinitamente pequeño, la diferencia que va del arco á su seno consiste en infinitamente pequeños de tercera, quinta órden, &c.; y que por lo mismo se puede tomar, sin recelo de error substancial, el arco por el seno.

De la equacion $A =$ sen A &c. sacarémos el valor

 del

del arco en potencias de su coseno, porque el coseno del arco A es el seno de su complemento $90°-A$, $\text{sen}(90°-A)=\cos A$ (I.701); y como

$$90°-A=\text{sen}(90°-A)+\frac{\text{sen}^3(90°-A)}{2.3}+\frac{3\,\text{sen}^5(90°-A)}{2.4.5}\ \&c.$$

será tambien

$$A=90°-\cos A-\frac{\cos^3 A}{2.3}-\frac{3\cos^5 A}{2.4.5}-\frac{3.5\cos^7 A}{2.4.6.7}\ \&c.$$

758 Cuestion 2. *Dada la tangente, hallar en potencias suyas el valor del arco.*

Queda probado (552) que si hacemos el arco $=u$, su tangente $=x$, y $R=1$, $du=\frac{dx}{1+xx}$, ó $du=dx(1+xx)^{-1}$. Por la fórmula (416) sale $(1+xx)^{-1}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-$&c. será, pues, $du=dx-x^2dx+x^4dx-x^6dx+x^8dx$ &c. de donde, despues de executada la integracion y las substituciones correspondientes, sale

$$A=\text{tang}\,A-\frac{\text{tang}^3 A}{3}+\frac{\text{tang}^5 A}{5}-\frac{\text{tang}^7 A}{7}+\frac{\text{tang}^9 A}{9}\ \&c.$$

Si en esta equacion hacemos substituciones análogas á las que hemos hecho en la equacion de antes (657), sacarémos la siguiente equacion

$$90°-A=\tan(90°-A)-\tfrac{1}{3}\text{tang}^3(90°-A)+\tfrac{1}{5}\text{tang}^5)90°-A)\ \&c.$$

y para expresion del arco en potencias de su tangente, esta serie

$$A=90°-\cot A+\frac{\cot^3 A}{3}-\frac{\cot^5 A}{5}+\frac{\cot^7 A}{7}-\frac{\cot^9 A}{9}+\&c.$$

759 Cuestion 3. *Dado que sea el valor de un arco, hallar en potencias suyas el valor de su seno.*

Sabemos que siendo u un arco, x su seno, y $R=1$, es $du=\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, ó $du\sqrt{(1-xx)}=dx$; quadrándolo todo, $du^2(1-xx)=dx^2$, cuya equacion despues de diferenciada, haciendo constante la du, dá $-2xdxdu^2=2dx.ddx$, ó $-xdu^2=ddx$. Quando el arco es infinitamente pequeño, es igual con

su

su seno (657), quiero decir, que entonces $u = x$, podemos, pues, hacer

$x = u + bu^3 + cu^5 + eu^7 +$ &c. y tendremos

$dx = du + 3bu^2du + 5cu^4du + 7eu^6du +$ &c.

$ddx = 2.3budu^2 + 4.5cu^3du^2 + 6.7eu^5du^2 +$ &c.

Si en la equacion $-xdu^2 = ddx$, substituimos en lugar de x su valor, y en lugar de ddx el suyo, tendrémos $-udu^2 - bu^3du^2 - cu^5du^2 - eu^7du^2$ &c. $= 2.3budu^2 + 4.5cu^3du^2 + 6.7eu^5du^2 +$ &c. de donde se sacará $b = -\frac{1}{2.3}$, $c = \frac{1}{2.3.4.5}$, $e = -\frac{1}{2.3.4.5.6.7}$ &c. cuyos valores, despues de substituidos en $x = u + bu^3 + cu^5 + eu^7 +$&c. A en lugar de u, y sen A en lugar de x, sale

$$\text{Sen}\,A = A - \frac{A^3}{2.3} + \frac{A^5}{2.3.4.5} - \frac{A^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{A^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} \text{ \&c.}$$

Esta expresion tambien dá

$$A - \text{sen}\,A = \frac{A^3}{2.3} - \frac{A^5}{2.3.4.5} + \frac{A^7}{2.3.4.5.6.7} - \text{\&c.}$$

de la qual tambien se saca la misma consecuencia de antes (657); es á saber, que quando el arco es infinitamente pequeño, se confunde con su seno.

Si en esta última equacion, y en la de antes (657) substituimos $\frac{1}{2}A$ en lugar de A, y las multiplicamos ambas por 2, sacarémos las dos expresiones siguientes de la diferencia que va del arco á su cuerda

$$A - 2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{\text{sen}^3\frac{1}{2}A}{3} + \frac{3\,\text{sen}^5\frac{1}{2}A}{4.5} + \frac{3.5\,\text{sen}^7\frac{1}{2}A}{4.6.7} \text{ \&c.}$$

$$A - 2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}A = \frac{A^3}{2.3.2^2} - \frac{A^5}{2.3.4.5.2^4} + \frac{A^7}{2.3.4.5.6.7.2^6} \text{ \&c.}$$

760 Cuestion 4. *Dado el arco* A, *hallar en potencias suyas el valor de su tangente.*

Ya que dada tang A es

$$A = \text{tang}\,A - \frac{\text{tang}^3 A}{3} + \frac{\text{tang}^5 A}{5} - \text{\&c. (660)},$$

y ahora dado A, hemos de hallar tang A, hemos de acudir al regreso de las series. Porque si llamamos $A = m$, y llamamos tang $A = y$, la cuestion se

se reduce á que en el supuesto de ser

$$m = ay + cy^3 + ey^5 + gy^7 + iy^9 + \&c.$$

saquemos el valor de y en m. Haremos, pues,

$$y = Am + Cm^3 + Em^5 + Gm^7 + Im^9 + \&c.$$

Por consiguiente será

$$m = \begin{cases} ay = aAm + aCm^3 + aEm^5 + aGm^7 + aIm^9 + \&c. \\ cy^3 = \quad cA^3 + 3cA^2C + 3cA^2E + 3cA^2G + \&c. \\ \quad + 3cAC^2 + 6cACE + \&c. \\ \quad + cC^3 + \&c. \\ ey^5 = \quad eA^5 + 5eA^4C + 5eA^4E + \&c. \\ \quad + 10eA^3C^2 + \&c. \\ + gy^7 = \quad + gA^7 + 7gA^6C + \&c. \\ iy^9 = \quad iA^9 + \&c. \end{cases}$$

Si sacamos ahora los valores de las indeterminadas A, C, E, G, I &c. expresados en a, b, c, e, g, i &c. y los substituimos en $y = Am + Cm^3 + Em^5 + Gm^7$ &c. saldrá el valor de $y =$ tang A. Los valores de a, c, e, g, i los hemos de sacar de la equacion $A =$ tang $A - \frac{1}{3}$tang$^3 A$, &c. por la qual consta que $a = 1$, $c = -\frac{1}{3}$, $e = \frac{1}{5}$ &c. substituyendo finalmente A en lugar de m, tang A en lugar de y, saldrá por último

$$\text{tang } A = A + \frac{A^3}{3} + \frac{2A^5}{3.5} + \frac{17A^7}{3.5.7.3} + \frac{62A^9}{3.5.7.9.3} \&c.$$

761 Cuestion 5. *Dado el arco, hallar en potencias suyas el valor de su coseno.*

Sabemos que tang $= \frac{\text{sen.}}{\text{cos.}}$; luego cos $= \frac{\text{sen.}}{\text{tang.}}$. Luego para sacar cos A, partirémos por las reglas del Algebra la serie (659) por la serie (660), y hecha la division, saldrá

$$\text{Cos } A = 1 - \frac{A^2}{2} + \frac{A^4}{2.3.4} - \frac{A^6}{2.3.4.5.6} + \frac{A^8}{2.3.4.5.6.7.8} \&c.$$

Con el auxîlio de esta serie y de la antecedente se podrá calcular el coseno y la tangente de todo arco, tomando el arco en la tabla. Pero como estas

tas series son tanto mas convergentes, quanto menor es el arco, quando se busque el seno de un arco que pasa de 45°, mejor será calcular el coseno de su complemento por la serie. Y quando se haya de calcular el coseno de un arco que pasa de 45°, mejor será apelar á la serie (659).

762 La serie (661) da la siguiente expresion del seno verso

$$1 - \cos A = \frac{A^2}{2} - \frac{A^4}{2.3.4} + \frac{A^6}{2.3.4.5.6} - \&c.$$

de la qual se infiere, que quando A es infinitamente pequeño, el coseno discrepa del radio cantidades infinitamente pequeñas de segundo, quarto, &c. grado.

Si el arco A fuese negativo, no por eso mudará de signo término alguno de la serie (661), porque en cada uno de ellos hay una potencia par de A. Por el contrario, si A es negativo, los términos de las series (657) y (660) mudarán de signo. De donde inferirémos que: el seno, la tangente, y por consiguiente la cotangente de un arco negativo son negativos, y su coseno es positivo; quiero decir que en todos los casos su seno, su tangente, y su cotangente tienen un signo contrario al que tienen en las tablas, y que su coseno guarda el mismo signo que les da la tabla.

763 Todas las series sacadas pueden servir para rectificar el círculo; pero haremos aplicacion de una de ellas no mas, y será la (657), por cuyo medio buscarémos quanto coge tendido en plano el arco de 30° v. gr. como sen 30° $= \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}$ (I.705) con hacer en la fórmula las substituciones correspondientes, saldrá

$$\text{Arco } 30° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{3}{2.4.5.2^5} + \frac{3.5}{2.4.6.7.2^7} + \frac{3.5.7}{2.4.6.7.8.9.2^9} \ \&c.$$

Executarémos las divisiones indicadas en cada tér-

término hasta ocho decimales para sacar seis cabales, y saldrá

$$\frac{1}{2} = 0,5$$
$$\frac{1}{48} = 0,02083333$$
$$\frac{3}{1280} = 0,00234375$$
$$\frac{15}{43008} = 0,00034877$$
$$\frac{105}{1769472} = 0,00005934$$
$$\frac{945}{86507520} = 0,00001092$$
$$\frac{10395}{4907335680} = 0,00000212$$

$$\text{Suma} = 0,523598$$

sacamos, pues, que el arco de 30°: R :: 0,523598 : 1. Los dos últimos guarismos de la suma se desechan porque no son cabales. El valor del arco se podria sacar tan cabal y con quantas decimales se quisiera, prosiguiendo las divisiones con mas términos de la serie, cuya ley es muy patente. Este es un trabajo hecho ya; multiplicando por 6 el valor del arco de 30°, se ha sacado el de la semicircunferencia hasta 127 decimales, quiero decir, que se ha hallado el arco de 180° $= R \times$ 3,141592 653589 793238 462643 383279 502884 197169 399375 105820 974944 592307 816406 286208 998628 034825 342117 067982 148086 513272 306647 0938446+. Luego la semicircunferencia del círculo tendida en plano es igual á tres veces el radio, mas una parte del mismo radio cuyo valor expresa la decimal que le acompaña. El último guarismo de esta decimal no es el límite del valor hallado, porque se pueden sacar muchos mas al infinito, prosiguiendo la operacion, todo lo qual es una conseqüencia de la equacion (657), cuyo segundo miembro es inde-

definito. Esto manifiesta que solo por aproxîmacion, bien que continuada quanto se quiera, se puede sacar la razon del diámetro á la circunferencia.

Una vez hallado el valor de un arco, se puede señalar sin mas operaciones que las de la arismética el de todos los demas. La mitad del valor del arco de 180° será el valor del arco de 90°, su tercio será el valor del arco de 60° &c.

764 Por este camino se ha formado la tabla puesta al fin de este tomo, la qual da en partes del radio el valor de un arco de un número qualquiera de grados, minutos, segundos y décimas, centésimas, &c.

Si se quiere con siete decimales la expresion de un arco de 6° 22′ 17″ 3; se tomarán en la tabla las cantidades siguientes, con una ó dos decimales mas, para sacar cabal la suma

El arco de 6° =	0,104719755
20′ = . .	5817764
2′	581776
10″.	48481
7″.	33937
$\frac{3''}{10}$ ó 0″, 3 . . .	1454

Valor del arco de 6° 22′ 17″,3 = 0,1112032

765 Quando se quiera hacer uso de la fórmula (659) para hallar el valor del seno de un arco determinado, se le podrá dar esta forma,

$$\text{sen } A = A - B + C - D + E - \&c.$$

sal-

saldrá $B = A^2 \cdot \frac{1}{6} A$ $C = A^2 \frac{1}{20} B$

$D = A^2 \frac{1}{42} C$ $E = A^2 \frac{1}{72} D.$

Por donde se echa de ver que basta calcular sola una vez A^2, única potencia de A que lleva ahora cada término, y que los divisores son acomodados y muy pequeños. Hay todavía mas: dispongo verticalmente estos quatro primeros divisores, como sigue, tomo sus diferencias primeras y segundas; y como las últimas salen constantes, prosigo las tres columnas, guardando la ley que siguen, y de la derecha á la izquierda.

Divisores.	*Dif. primeras.*	*Dif. segundas.*
6		
. . . .	14	
20	. . . .	8
. . . .	22	
42	. . . .	8
. . . .	30	
72	. . . .	8
. . . .	38	
110	. . . .	8
. . . .	46	
156	. . . .	8
. . . .	54	
210	&c.	

Mediante esta consideracion se puede continuar la serie, y para sacar, sin necesidad de la multipli-

plicacion, los partidores correspondientes á los valores de F, G, &c. y sin mas auxîlio que el de la regla de sumar, nos guiarémos por las columnas. Aquí se ve patentemente quanto merecen atenderse las diferencias constantes, por lo muy socorridas que son en muchos cálculos.

766 Apliquemos ahora la equacion para hallar el seno de un arco, v. gr. el de 30°. Por la tabla el arco de $30° = 0{,}5235987756$, cuyo quadrado hemos de formar para sacar los valores de los diferentes términos de la serie. Como A es una cantidad decimal, harémos la operacion por el método abreviado de multiplicar las decimales (I. 161).

$$
\begin{array}{rr}
A = & 0{,}5235987756 \\
 & 0{,}5235987756 \\
\hline
 & 0{,}2617993878 \\
 & 104719755 \\
 & 15707963 \\
 & 2617994 \\
 & 471239 \\
 & 41888 \\
 & 3665 \\
 & 367 \\
 & 26 \\
 & 3
\end{array}
$$

De

De donde se saca sumando unos con otros los valores de A^2

$$\left\{\begin{array}{lcl} A^2 & = & 0,2741556778 \\ 2A^2 & = & 0,5483113556 \\ 3A^2 & = & 0,8224670334 \\ 4A^2 & = & 1,0966227112 \\ 5A^2 & = & 1,3707783890 \\ 6A^2 & = & 1,6449340668 \\ 7A^2 & = & 1,9190897446 \\ 8A^2 & = & 2,1932454224 \\ 9A^2 & = & 2,4674011002 \end{array}\right.$$

Estos múltiplos de A^2, preparados como aquí se ve abrevian mucho el cálculo de la serie (665). Con este motivo prevenimos de paso que siempre que haya de servir un mismo factor constante, será de mucho alivio tenerle así preparado. Para manifestar en el caso presente la utilidad de esta preparacion, $\frac{1}{6}A = 0,0872664626$, por cuya cantidad se ha de multiplicar el valor de A^2, y saldrá el valor de B. Pero como acabamos de multiplicar el valor de A^2 por cada uno de los nueve guarismos de la Arismética, tenemos ya á mano todos sus productos por cada uno de los guarismos del valor de $\frac{1}{6}A$. Solo falta asentar estos productos particulares, como sigue, por el orden que corresponde, apuntando, con el fin de precaver todo error, cada guarismo valor del $\frac{1}{6}A$ á medida que se escriben aquí sus productos correspondientes.

$$0,08A^2 = 0,0219324542 2$$
$$0,007A^2 = 0,0019190897 4$$
$$0,0002A^2 = 0,0000548311 4$$
$$0,00006A^2 = 0,0000164493 4$$

&c. 164493
10966
1645
55
16

$$B = 0,0239245962$$

Partiendo despues B por 20, se sacará del mismo modo, con sola una operacion de sumar, el producto del cociente por A^2, cuyo producto será $C = 0,0003279532$. Por el mismo camino se hallará, bien que mas pronto, el valor de D y E. Aquí van los términos, separados los positivos de los negativos.

$A = 0,5235987756$	$-B = 0,0239245962$
$C = 0,0003279532$	$-D = 0,0000021407$
$E = 0,0000000082$	$-0,23926737$

$+0,523926737$ Suma de los térm. posit.
$-0,023926737$ Suma de los negativos.

Luego sen $30° = 0,500000000$, Valor cabal.

767 Cuestion 6. *Rectificar la parábola cuya equacion es* $2ax = yy$.

La diferencial de esta equacion es $adx = ydy$,

Fig. la qual da $dx^2 = \frac{y^2dy^2}{a^2}$. Si este valor de dx^2 se substituye en su lugar en la fórmula $\surd(dx^2+dy^2)$, saldrá $\frac{dy}{a}\surd(yy+aa)=du$, llamando u el arco de la curva por rectificar. Luego $dy\times\surd(yy+aa) = adu$, y $S.adu=au=S.dy\surd(yy+aa)$, cuya equacion está diciendo que la rectificacion de la parábola pende de la quadratura de la hypérbola.

Sea AMN la parábola propuesta, en cuyo vér-
104. tice sea tangente la AQ. Si llamamos AP, y, será $au=S.dy\surd(y^2+a^2)$. Tiremos á la AP la perpendicular $AA'=a$, y tracemos una hypérbola equilátera $N'A'P'$, cuyo centro esté en A, y el vértice en A'. Desde el punto P tirémosle á la parábola la ordenada PM, prolongándola hasta que encuentre la hypérbola en P'; será $AA'P'P=S.dy\surd(y^2+a^2)$; luego $au=AA'P'P$; por consiguiente el arco AM de la parábola será igual al espacio hyperbólico $AA'P'P$ dividido por la mitad del parámetro.

768 Cuestion 7. *Rectificar el arco de elypse*
105. FM, *en el supuesto de ser* AD = a, AF = b, AB = x, BM = y, FM = u.

La equacion de la curva da $y^2=\frac{b}{a}(a^2-x^2)$, de la qual sale $dy=\frac{-bxdx}{a\surd(a^2-x^2)}$. Será, pues, el arco elíptico, ó $S.du=S.dx\surd\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)=S.dx\surd\left(1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}\right)=S.dx\frac{\surd(a^4-a^2x^2+b^2x^2)}{a\surd(a^2-x^2)}$, cuya integral solo por series se puede sacar.

769 Cuestion 8. *Rectificar el arco* FM *de hypérbola.*

106. En el supuesto de ser el primer semiexe $AF = a$, el segundo semiexe $AB=b$, $AP=x$, $PM=y$, la equacion de la curva dará $y=\frac{b}{a}\surd(x^2-a^2)$, y saldrá $FM=S.dx\frac{\surd(a^2x^2-a^4+b^2x^2)}{a\surd(x^2-a^2)}$.

Apli-

Fig.

Aplicacion del cálculo integral para medir la solidez de los cuerpos.

770 Para medir la solidez de los cuerpos, podemos suponer que se componen de rebanadas infinitamente delgadas y paralelas unas á otras, ó de una infinidad de pirámides cuyos vértices se juntan todos en un punto comun. Quando se consideran como formados de rebanadas infinitamente delgadas y paralelas, la diferencia de las dos superficies opuestas que terminan cada rebanada es infinitamente pequeña, y por lo mismo se debe omitir en los cálculos, si queremos dar á entender que dicha rebanada es infinitamente delgada. De donde resulta que su solidez se ha de expresar con el producto de la una de sus dos bases opuestas por su .107
altura infinitamente pequeña. Si nos figuramos v. gr. que la pirámide *SABC* se compone de rebanadas como *abcfeg* infinitamente delgadas, podrémos expresar su solidez con el producto de la superficie *abc* ó de la superficie *gef* por el grueso de la rebanada.

Si consideramos el sólido de revolucion engendrado de la curva *AM* dando la vuelta al rededor de la recta *AP*, como compuesto de rebanadas pa- 108.
ralelas é infinitamente delgadas; habrémos de expresar la medida de cada rebanada por el producto de la superficie del círculo cuyo radio es *PM*, por el grueso *Pp*.

771 Todo esto sentado, declaremos como se ha de valuar la solidez de los cuerpos. Considerarémos cada rebanada como la diferencial del sólido, porque en la realidad $MmlL = AmlA - AMLA = d(AMLA)$; y despues de determinada la expresion algebráica de dicha rebanada, se integrará.

772 Propongámonos medir v. gr. la pirámide *SABC*. 107.

 Su-

Fig. Supondrémos que la superficie ABC de su base es igual á la cantidad conocida bb, y su altura $ST = a$; llamarémos x la distancia St de una rebanada qualquiera al vértice S, y será dx el grueso de la rebanada. Por lo que mira á la superficie abc nos la dará esta proporcion (I. 640 3.º) $(ST)^2 : (St)^2 :: ABC : abc$; esto es, $aa : xx :: bb : abc = \frac{bbxx}{aa}$; será, pues, la solidez de la rebanada igual á $\frac{bbxxdx}{aa}$, cuya integral es $\frac{bbx^3}{3aa} + C$, ó solamente $\frac{bbx^3}{3aa}$, si contamos la solidez desde el vértice S. Esta cantidad que expresa la solidez de una porcion piramidal qualquiera $Sabc$ es lo mismo que $\frac{bbxx}{aa} \times \frac{x}{3}$, lo propio que $abc \times \frac{St}{3}$, cuyo valor concuerda con el que sacamos tiempos ha (I. 645).

772 Por lo que mira á los sólidos de revolucion, se puede sacar una fórmula general que exprese la rebanada elemental ó diferencial. Sea $r : c$ la razon entre el radio y la circunferencia; la circun-
108. ferencia cuyo radio es PM ó y nos la dará esta proporcion $r : c :: y : \frac{cy}{r}$. Si multiplicamos este valor $\frac{cy}{r}$ de la circunferencia cuyo radio es PM, por $\frac{1}{2}y$ mitad del radio, será $\frac{cy^2}{2r}$ la superficie (260), cuyo producto por el grueso Pp ó dx es $\frac{cy^2dx}{2r}$, la qual es la expresion del elemento de la solidez de todo el sólido de revolucion.

Y como en el supuesto de ser $r : c$ la razon entre el radio y la circunferencia, ha de ser (260) $\frac{c}{2r}$ la area del círculo cuyo radio $= 1$; si llamamos p esta area, y substituimos p en la fórmula en lugar de $\frac{c}{2r}$, se transformará en $pyydx$. De donde inferirémos que en el supuesto de ser p la area del círculo cuyo radio $= 1$, será pyy la area de un cír-

círculo cuyo radio $=y$, pues $1^2 : y^2 :: p : pyy$ (580). Fig.
Para aplicar esta fórmula á los casos particulares, se substituirá por y su valor en x sacado de la equacion de la curva generatriz AM, y se integrará.

773 Cuestion 1. *Hallar la solidez del cono engendrado por el triángulo rectángulo* ABD, *dando la vuelta al rededor del lado* AB.

Llamemos AB, x; BD, y; y u el ángulo BAD.
Si tomamos AD por radio, tendrémos $\cos u : \text{sen}\, u$ 109.
$:: x : y = \frac{x.\text{sen}\, u}{\cos u}$, y por consiguiente $yy = \frac{(\text{sen}\, u)^2}{(\cos u)^2} xx$.
Luego el cono será $\frac{c}{2r} . S . \frac{\text{sen}^2 u}{\cos^2 u} xxdx = \frac{c}{2r} . \frac{\text{sen}^2 u}{\cos^2 u} . \frac{x^3}{3} = \frac{c}{2r} . \frac{xy^2}{3}$ cuya cantidad (I. 646) es la tercera parte del cilindro que tiene una misma base y altura que él.

Por el mismo camino sacaríamos que el cono engendrado por el mismo triángulo dando la vuelta al rededor del exe ó lado BD, sería $\frac{c}{2r} . \frac{x^2 y}{3}$. Luego el primer cono será al segundo $y : x :: \text{sen}\, u : \cos u$.

774 Cuestion 2. *Hallar la solidez de un conoide parabólico, ó de un paraboloide.*

Llámase *conoide* todo cuerpo formado por la revolucion de la area de alguna de las tres secciones cónicas dando la vuelta al rededor del exe, de la ordenada, ó de la tangente de dicha seccion. Quando el sólido resulta de la revolucion de una semiparábola girando al rededor de su exe, el sólido se llama *conoide parabólico* ó *paraboloide*; se llama *conoide elíptico* ó *elipsoide*, si se origina de la revolucion de una semielipse al rededor del uno de sus exes; quando la area elíptica da la vuelta al rededor del exe mayor de la curva, engendra el *elipsoide prolongado*, y si da la vuelta al rededor del exe menor, engendra el *elipsoide aplanado*. El elipsoide, sea el que fuere, se llama tambien *esferoide*. Finalmente, quando el só-

Fig. lido resulta de la revolucion de una area hyperbólica al rededor del uno de sus exes, se llama *conoide hyperbólico* ó *hyperboloide.* Todo esto presupuesto, determinarémos la solidez del paraboloide.

Como la equacion de la parábola es $yy = ax$, la fórmula $\frac{cyydx}{2r}$ se transformará en $\frac{caxdx}{2r}$, cuya integral es $\frac{cax^2}{4r} + C$, ó $\frac{cax}{2r} \times \frac{x}{2} + C$. Si queremos expresar la solidez del paraboloide desde el punto A, como en este supuesto el sólido es cero, quando x es cero, la constante C ha de ser cero, y la solidez se
108. reduce á $\frac{cyy}{2r} \times \frac{x}{2}$; pero $\frac{cyy}{2r}$ expresa (672) la superficie del círculo cuyo radio fuese PM, ó la base del paraboloide $AMLA$; luego el paraboloide es la mitad del producto de su base por su altura x; luego es la mitad del cilindro de igual base y altura que él.

Si quisiéramos apreciar la solidez desde un punto dado K, tal que $AK = e$; como en este supuesto sería cero la solidez en el punto K, esto es, quando $x = e$, la integral general ha de ser cero en este caso, quiero decir que $\frac{cax^2}{4r} + C$, la qual será $\frac{cae^2}{4r} + C$ ha de ser cero; luego $\frac{cae^2}{4r} + C = 0$, y $C = -\frac{cae^2}{4r}$; luego la solidez de una porcion de paraboloide comprehendida entre dos planos paralelos distantes respectivamente x y e del vértice, es $\frac{cax^2}{4r} - \frac{cae^2}{4r}$.

775 Cuestion 3. *Hallar la solidez del elipsoide prolongado.*

110. Si llamamos el exe mayor AB, a; el menor CD, b; AP, x; PM, y, la equacion de la elipse (295) será $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$. Por consiguiente la fórmula $\frac{cy^2dx}{2r}$ se transformará en $\frac{cbb}{2raa}dx(ax - xx)$, ó $\frac{cbb}{2raa}(axdx - x^2dx)$, cuya integral es $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$

+

$+C$, ó solamente $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)$, si contamos la solidez desde el punto *A*.

Para sacar la solidez de todo el esferoïde, harémos $x=AB=a$, y saldrá $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{3}\right)$ que se reduce á $\frac{cabb}{12r}=\frac{cbb}{4r}\times\frac{1}{3}a$, ó á $\frac{cbb}{8r}\times\frac{2}{3}a$; pero $\frac{cbb}{8r}$ expresa la superficie del círculo cuyo diámetro es $b=CD$, y por lo mismo $\frac{cbb}{8r}\times a$ es la solidez del cilindro circunscripto al elipsoide; luego una vez que, por lo hallado, la solidez del elipsoide es $\frac{cbb}{8r}\times\frac{2a}{3}$, hemos de inferir que la solidez del elipsoide es los $\frac{2}{3}$ del cilindro circunscripto. Y como la esfera es lo mismo que un elipsoide cuyos dos exes son iguales, será tambien la esfera los $\frac{2}{3}$ del cilindro circunscripto.

776 Por el mismo camino hallaríamos que el elipsoide aplanado es los $\frac{2}{3}$ del cilindro circunscripto; quiero decir, que en el supuesto de ser a y b los dos exes mayor y menor de la elipse generatriz, la solidez del esferoide aplanado será $\frac{caab}{12r}$; por consiguiente el esferoide prolongado es al aplanado :: $\frac{cabb}{12r}:\frac{caab}{12r}::b:a$, como el exe menor es al mayor.

777 Si en lo propuesto (675) hubiéramos contado la solidez desde un punto determinado *K*, tal que $AK=e$, hubiéramos sacado la integral general $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)+C$; y como la solidez hubiera empezado desde el punto *K*, dicha integral sería cero en este punto, esto es, quando $x=e$. Pero entonces se transforma en $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2}-\frac{e^3}{3}\right)+C$; luego

Fig. $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2}-\frac{e^3}{3}\right)+C=o$, y por consiguiente $C=-\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2}-\frac{e^3}{3}\right)$; luego la expresion de la solidez contada desde el punto K es $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)-\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2}-\frac{e^3}{3}\right)$. Esta es la expresion de una rebanada de esferoide comprehendida entre dos planos paralelos perpendiculares al exe, entre los quales hay la distancia $x-e$.

778 Cuestion 4. *Hallar la solidez del hyperboloide* AMm *engendrado por la hypérbola dando la vuelta al rededor de su primer exe.*

La equacion de la curva (329) será $y^2=$
111. $\frac{b^2}{a^2}(ax+xx)$, siendo a el primer exe, y b el segundo, y $AP=x$. Pero (330) $a:b::b:p=\frac{b^2}{a}$; luego $b^2=ap$, y $\frac{b^2}{a^2}=\frac{p}{a}$. Luego la fórmula $\frac{c}{2r}S.y^2dx=\frac{pc}{2ra}\times S.(axdx+x^2dx)=\frac{pc}{2ra}\left(\frac{ax^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)$. Si hacemos $x=a$, el conoide hyperbólico será $\frac{c}{2r}.\frac{p}{a}\left(\frac{5a^3}{6}\right)=\frac{c.p}{2r}\left(\frac{5a^2}{6}\right)$. Si hacemos $r:c::a:\frac{ac}{r}$, será este quarto término la circunferencia del radio a. Si multiplicamos esta circunferencia por $\frac{a}{2}$, sacarémos $\frac{ca^2}{2r}$, superficie del círculo cuyo radio $=a$. Si multiplicamos esta superficie por $\frac{5p}{6}$, sacarémos un cilindro cuya altura será $\frac{5}{6}p$, el qual tendrá con otro cilindro de la misma base, y cuya altura sea a, la razon de $\frac{5p}{6}:a::5p:6a$. Por consiguiente un conoide hyperbólico cuya altura es igual al primer exe, es al cilindro de igual base y altura, como el quíntuplo del parámetro del primer exe es al séxtuplo del mismo exe. Si la hypérbola fue-

fuese equilátera, será $p = a$, y el conoide hypérbólico cuya altura es igual al exe, será al cilindro de la misma base y altura como 5 es á 6. Fig.

779 Cuestion 5. *Hallar la solidez del hyperboloide engendrado por la hypérbola dando la vuelta al rededor de su segundo exe.*

Sea CM la hypérbola generatriz, cuyo centro 112.
está en A, y llamemos AC, b; su semiconjugado AD, a; AP, x; PM, y. La propiedad de la curva (332) dará $yy = bb + \frac{bbxx}{aa}$; luego $pyydx$ será $= pbbdx + \frac{pbbxxdx}{aa}$, cuya integral $pbbx + \frac{pbb}{3aa}x^3$ $= \frac{2}{3} pbbx + \frac{1}{3} py^2x$, despues de substituido en lugar de $\frac{bb}{aa} xx$ su valor $yy - bb$ sacado de la equacion de la curva. Es, pues, $\frac{2}{3}pbbx + \frac{1}{3}pyyx$ la solidez del cuerpo que forma la area $CAPM$ al tiempo de dar la curva una vuelta.

780 Cuestion 6. *Hallar el sólido formado por la revolucion de una hypérbola equilátera al rededor de su asymtoto.*

Sea MGN la hypérbola; AE, AL sus asym- 113.
totos. Para hallar el valor del sólido engendrado por la area $GFDB$ dando la vuelta al rededor de AB, llamarémos $AF = FG$, a; y será (352) $aa = xy$, ó $yy = \frac{a^4}{x^2}$, cuyo valor substituido en $\frac{c}{2r} S.y^2dx$ dará $\frac{c}{2r} S.\frac{a^4dx}{x^2}$. Y como la integral de $\frac{a^4dx}{x^2}$ ó $a^4x^{-2}dx$ es $-\frac{a^4}{x} + C$, será la expresion del hyperboloide que buscamos $\frac{c}{2r}\left(C - \frac{a^4}{x}\right)$. El valor de la constante C le hallarémos con suponer que el sólido es nulo quando $x = a$, en cuyo supuesto $C = a^3$; luego el valor cabal del sólido será $\frac{c}{2r} \times \left(a^3 - \frac{a^4}{x}\right) = \frac{c}{2r}\left(a^3 . \frac{(x-a)}{x}\right)$; de cuya fórmula inferirémos que si crecieren las abscisas en progre-

Fig. gresion arismética, de modo que sean a, $2a$, $3a$ &c. resultarán sólidos iguales á $\frac{c}{2r}a^3$ multiplicados succesivamente por 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ &c. Si fuese x infinita, el sólido será $\frac{c}{2r}a^3$, igual al cilindro engendrado en la misma revolucion por el rectángulo $AFGC$. Si fuese x menor que a, el sólido será negativo; é infinito, si fuese $x=0$. Por lo que, el sólido infinitamente largo engendrado por el espacio $GFLN$ es finito, y el que engendra la area $FAEMG$ dando la vuelta al rededor de la asymtota AL es infinito.

781 Cuestion 7. *Hallar la solidez de un sólido parabólico* ACBDA *engendrado por la rotacion de una parábola* ACB *al rededor de la ordenada* AB.

114. Llamemos a la abscisa CM de la parábola dada; y b la semiordenada AM ó BM; y suponiendo que sea ENF una seccion del sólido paralela á DC, llamarémos u la distancia MN ó EP que hay entre la expresada seccion y la linea CD. Sentado esto, la propiedad de la parábola (265) da $(AM)^2 : (EP)^2 :: CM : CP$, ó $bb : uu :: a : CP = \frac{auu}{bb}$; luego $EN = CM - CP = a - \frac{auu}{bb} = \frac{a\times(b^2-u^2)}{bb}$, y por consiguiente será $p\times(EN)^2 = \frac{pa^4}{b^4}\times(b^4-2bbuu+u^4)$ la expresion de la area de la seccion EF (672). El producto de esta area por la diferencial du de MN dará $\frac{pa^2}{b^4}(b^4du-2b^2u^2du+u^4du)$, elemento del sólido que buscamos. Luego su integral $\frac{pa^2}{b^4}(b^4u - \frac{2}{3}b^2u^3+\frac{1}{5}u^5)$ será el valor de la mitad del sólido quando $u=b$, en cuyo supuesto dicha integral será $\frac{8pa^2b}{15}$.

115. 782 Cuestion 8. *Hallar el valor del sólido* ACBDA *engendrado por la rotacion del segmento de círculo* ACB *al rededor de la cuerda ú ordenada* AB.

Su-

Supongamos el centro en O, y llamemos el radio OE, r; OM, m; y EP, u. Será $OP = \sqrt{[(OE)^2 - (EP)^2]} = \sqrt{(rr - uu)}$, y $EN = OP - OM = \sqrt{(rr-uu)} - m$. Se transformará, pues, en este caso la fórmula general (672) en $pdu(\sqrt{(rr-uu)} - m)^2 = pdu[r^2 - u^2 + m^2 - 2m\sqrt{(r^2-u^2)}] = pdu(r^2-u^2-m^2) - pdu(2m\sqrt{(r^2-u^2)} - 2m^2)$. La integral de $pdu(2m\sqrt{(r^2-u^2)} - 2m^2) = 2mp \times du \times [\sqrt{(rr-uu)} - m] = 2mp \times du \times EN$, será $2mp \times$ area $MNEC$; por consiguiente toda la integral será $pu(r^2 - m^2 - \frac{1}{3}u^2) - 2mp \times$ area $MNEC$, que es igual á $p \times MN \times [(AM)^2 - \frac{1}{3}(MN)^2] - 2p \times OM \times$ area $MNEC$, la qual en el supuesto de ser $MN = MA$ es $p \times \frac{2}{3}(AM)^3 - 2p \times OM \times ACM$, y será el valor de la mitad del sólido. Fig.

783 Cuestion 9. *Hallar la solidez del cuerpo prismoidal ó del prismoide* AEGB, *siendo los quatro lados* AH, AF, CH, CF *superficies planas, y* ADCB, EFGH *rectángulos dados, paralelos uno con otro.* 116.

Llamemos AB, a; AD, b; EH, c; EF, e; la altura perpendicular del sólido, h; x, la distancia, considerándola como variable, á que está del plano EG una seccion IL del sólido hecha con un plano paralelo á la base. Por el punto H supondrémos tirada en la superficie AH la HP paralela á EA, y en la cara BG la HN paralela á GC.

La naturaleza misma de la figura está diciendo que la seccion IL es un rectángulo, y de los triángulos semejantes HPB, HRM sacarémos $h : x :: PB = AB - EH : RM = IM - EH$; los triángulos semejantes HBN, HMQ dan $h : x :: BC - HG : ML - HG$. De estas proporciones sacarémos $IM - EH = \frac{(a-c)x}{h}$, y $ML - HG = \frac{(b-e)x}{h}$; luego $IM = \frac{(a-c)x}{h} + c$, y $ML = \frac{(b-e)x}{h} + e$; y por consiguiente la area del rectángulo $IL = \frac{(a-c)(b-e)}{h^2}x^2$

+

Fig. $+\frac{bc+ae-2ce}{h}x+ce$. Si multiplicamos esta expresion por dx, y sacamos despues la integral, resultará $\frac{(a-c)(b-e)x^3}{3h^2}+\frac{b+ae-2ce}{2h}x^2+cex$, valor del sólido $IFGL$, el qual quando $x=h$ se transforma en $\frac{(a-c)(b-e)h}{3}+\frac{(bc+ae-2ce)h}{2}+ceh=(2ab+ae+bc+2ce)\times\frac{1}{6}h=[AB\times AD+EH\times EF+(AB+EH)\times(AD+EF)]\frac{1}{6}h$, valor de todo el prismoide.

Si $EF=e$ llegara á ser nula, las líneas EH, FG se confundirian una con otra, y los planos $AEHB$, $DFGC$ formarían un ángulo en la parte superior del sólido, el qual en este caso tendria la forma de la armadura de un texado; su solidez se sacaría muy facilmente, y sería $=(2ab+bc)\times\frac{1}{6}h$, ó $(2AB+EH)\times AD\times\frac{1}{6}h$.

Si fuese $EF=EH$, y $AD=AB$, el sólido sería un trozo de pirámide quadrada, y su solidez sería $=(a^2+ac+c^2)\times\frac{1}{3}h=[(AB)^2+AB\times EH+(EH)^2]\times\frac{1}{3}h$; y si supusiéramos $EH=0$, resultaría la solidez de toda la pirámide cuya base fuese $(AB)^2$, y la altura h, y cuya solidez sería $=(AB)^2\times\frac{1}{3}h$.

784 Cuestion 10. *Hallar la solidez del sólido llamado* groin.

El sólido que los Autores Ingleses llaman groin es de tal configuracion, que todas las secciones paralelas á la base son quadrados, y las dos secciones hechas perpendicularmente á la base por el medio de los lados opuestos son semicírculos. Sea, pues, $cfeg$ una seccion paralela á la base; llamemos x la
117. distancia Ab que hay desde el vértice del sólido á dicha seccion, y supongamos $=a$ el radio $AB=BN$ de la seccion circular $ANBMA$ perpendicular á la base. En estos supuestos será $bn=\sqrt{(2ax-xx)}$ por la naturaleza del circulo (241), el lado del quadrado $cfeg$ será $2\sqrt{(2ax-xx)}$, y su area será $4(2ax$

—

$-xx$). Será, pues, el elemento de la porcion *cfegA* Fig.
del groin $= 4dx(2ax-xx)$, cuya integral será $4ax^2$
$-\frac{4x^3}{3}$, y expresará el valor de dicha porcion.
Luego si hacemos $x=a$, resultará $\frac{(2a)^3}{3}$, expresion de todo el sólido.

Por el mismo camino sacaríamos la solidez del groin, aun quando las secciones perpendiculares al medio de los lados opuestos en lugar de ser semicírculos, fuesen otras curvas qualesquiera, y las secciones paralelas á la base fuesen rectángulos y no quadrados.

785 Cuestion 11. *Hallar la solidez de la pirámide ó cono* ABCD *formado con tirar muchas lineas rectas desde todos los puntos de un plano dado* BDC *á un punto dado* A *fuera de dicho plano.*

Sea *EFG* una seccion paralela á *BDC*; llamemos x la distancia perpendicular *AQ* á que está dicha seccion del vértice *A*; a, la altura dada *AP* del sólido, y b, la area de la base *BDC* que suponemos dada. 118.

Por lo dicho (I. 640) los dos planos *BDC*, *EFG* son semejantes; y como las figuras semejantes tienen unas con otras la misma razon que los quadrados de sus lados homólogos (610), será $(AP)^2 : (AQ)^2 :: BDC : EFG$ ó $a^2 : x^2 :: b : EFG = \frac{bx^2}{a^2}$, cuya expresion multiplicada por dx, diferencial de la altura *AQ*, ó $\frac{bx^2dx}{a^2}$, será el elemento del sólido $AEGF = S.\frac{bx^2dx}{aa} = \frac{bx^2}{3a^2} = \frac{ab}{3}$ quando $x=a$; será, pues, $\frac{ab}{3}$ la solidez del sólido propuesto.

786 Cuestion 12. *Hallar la solidez de una úngula cilíndrica.*

Llamamos *úngula cilíndrica* el sólido *ADBE* que resulta de cortar un cilindro con un plano obli- 119.
cuo

Fig. cuo á la base, el qual para escusar complicaciones, supondrémos que pasa por el centro de su base.

Si nos figuramos la úngula cortada con planos paralelos infinitamente inmediatos unos á otros, y perpendiculares á la base *AEB*, las secciones serán triángulos semejantes cuyas superficies estarán en razon de los quadrados de sus lados homólogos (I.668). Por consiguiente, si llamamos r el radio *CE* de la base; a, la altura *DE*; é y, la base *PM* del triángulo *PMN*, tendrémos $CED : PMN :: rr : yy$; pero $CED = \frac{ar}{2}$; luego $PMN = \frac{arvy}{2rr} = \frac{ayy}{2r}$. Luego si llamamos *AP*, x, será dx el grueso de la rebanada terminada por dos planos paralelos, y será $\frac{ayydx}{2r}$ su valor. Como y es la ordenada del círculo que sirve de base, y es $yy = 2rx - xx$ (241), la rebanada elemental será $\frac{adx(2rx - x^2)}{2r}$ ó $\frac{a}{2r}(2rxdx - xxdx)$, cuya integral, contando desde el punto *A*, es $\frac{a}{2r}(rx^2 - \frac{x^3}{3})$. Por consiguiente, sacarémos el valor de todo el sólido con hacer $x = 2r$, y resultará $\frac{a}{2r}(4r^3 - \frac{8r^3}{3})$, ó $\frac{2}{3}ar^2$, ó $\frac{ar}{2} \times \frac{4}{3}r$, ó $CED \times \frac{4}{3}AC$, ó finalmente $CED \times \frac{2}{3}AB$; quiero decir, los dos tercios del prisma cuya base fuese el triángulo *CED*, y la altura el diámetro *AB*.

787 Cuestion 13. *Hallar la solidez de una úngula cónica* EFGC *cortada en el cono* ABC *con un plano* EFG *que pasa por su base.*

120. Sea *AD* la altura perpendicular del cono; tiremos la *AM* perpendicular á *HE*, exe de la seccion *FEG*, y sea *FAG* otra seccion del cono hecha con un plano que pasa por el vértice *A*, y la linea *FG*.

Esto supuesto, los dos sólidos *CAFG*, *EAFG*, cuyas bases son respectivamente *FCG*, y *FEG*, serán

rán por lo probado poco ha (685) respectivamente $FCG \times \frac{1}{3}AD$, y $FEG \times \frac{1}{3}AM$; restando el segundo del primero, su diferencia $\frac{FCG \times AD - FEG \times AM}{3}$ será el valor de la úngula $CEFG$. Fig.

Si las bases FCG, FEG fuesen secciones cónicas, se buscarían sus areas por lo dicho (645 y sig.) y se resolvería la cuestion. Supongamos v. gr. la HE paralela á AB, la seccion FEG será (364) una parábola cuya area es (649) $\frac{2}{3} FG \times EH$; luego la solidez del segmento $EFGA = \frac{2}{9} \times FG \times EH \times AM$; y rebaxando esta cantidad del sólido $CFGA$, el residuo será el valor de la úngula.

Usos del cálculo integral para hallar las superficies curvas de los sólidos.

788 Tratarémos aquí de las superficies de los sólidos de revolucion. Para cuyo fin nos figurarémos que mientras la curva AM da la vuelta al rededor de AP, su porcion Mm infinitamente pequeña traza una zona, faja ó porcion de cono truncado, la qual es el elemento de la superficie, é igual con el producto de Mm por la circunferencia cuyo radio fuese la perpendicular tirada desde el medio de Mm y AP, ó lo que es lo propio, una vez que Mm es infinitamente pequeña, por la circunferencia cuyo radio fuese MP ó el diámetro MM'. Luego si llamamos p la razon entre la circunferencia y el diámetro, la circunferencia del círculo cuyo diámetro fuere $MM' = 2y$, será $2py$. Será, pues, $2py\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ el elemento de la superficie de los sólidos de revolucion. 123.

Si llamáramos u la curva AM, sería $Mm = du$, y substituyendo en $2py\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, du en lugar de $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, la fórmula se convertiría en estotra $2pydu$, que parece mas sencilla.

Cues-

Fig. 789 Cuestion 1. *Hallar la superficie del cono recto* ABD.

Nos figurarémos el cono cortado con un plano *MNG* paralelo á su base; siendo el exe *AP*. Si llamamos *AB*, a; *BC*, b; *PM*, y; *AM*, u; los trián-
121. gulos semejantes *ABC*, *AMP* darán *AB* : *BC* :: *AM* : *MP*; esto es, $a : b :: u : y = \frac{bu}{a}$. Substituyendo este valor de y en $2pydu$, resultará $\frac{2pbudu}{a}$ elemento de la superficie del cono parcial *AMN*, cuya integral $\frac{pbu^2}{a}$ será el valor de la superficie del mismo cono. Quando $u = a$, la expresion $\frac{pbu^2}{a}$ expresará la superficie de todo el cono; y como entonces $\frac{pbu^2}{a} = \frac{pba^2}{a} = abp$, será la superficie convexâ de todo el cono $= p \times AB \times BC$.

790 Cuestion 2 *Hallar la superficie de la esfera* AMBM'A *cuyo radio* CM = a.

Llamarémos *AP*, x; *PM*, y; *AM*, u; y será
122. $Mm = du$: $Pp = Mn = dx$. De los triángulos semejantes *CPM*, *Mmn* sacarémos *PM* : *MC* :: *Mn* : *Mm*, esto es $y : a :: dx : du = \frac{adx}{y}$. Substituyendo este valor de du en la fórmula $2pydu$, resultará $2padx$, y por consiguiente la superficie $= 2pax = AP \times$ circunf. *AMBM'A*. Como $2ap$ es la periferia del círculo *AMBM'*, y la periferia multiplicada por la mitad del radio a vale la area del expresado círculo (I.556), dicha periferia multiplicada por a valdrá el duplo de dicha area, y si la multiplicamos por $2a = AB$, el producto $AB \times$ perif. *AMBM'* será quádruplo de la área del mismo círculo. Y como en el supuesto de ser $x = AB$, representa la fórmula la superficie de toda la esfera, síguese que la superficie de toda la esfera es quádrupla de la area de uno de sus círculos máximos, conforme ya lo tene-

nemos averiguado por otro camino (I.754). Fig.

Luego, ya que $AP \times$ periferica $AMBM'$ es la superficie del segmento esférico $AM'PM$, inferirémos que la superficie de un segmento esférico es á la su- 122.
perficie de toda la esfera :: $AP \times$ perif. $AMBM'$: $AB \times$ perif. $AMBM'$ :: $AP : AB$, esto es, como la altura ó grueso del segmento al diámetro de la esfera.

791 Cuestion 3. *Hallar la superficie del paraboloide engendrado de la parábola* AM *al rededor de su exe.*

La equacion de esta curva $yy = ax$ dá $x = \frac{yy}{a}$, 123.
$dx = \frac{2ydy}{a}$, y $dx^2 = \frac{4yydy^2}{aa}$; luego $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dy^2 + \frac{4yydy^2}{aa})} = dy\frac{\sqrt{(aa+4yy)}}{\sqrt{aa}}$. Luego la fórmula $2pydu$ se transformará en $\frac{2pydy}{a} \times (a^2 + 4y^2)^{\frac{1}{2}}$. Para integrar esta diferencial, acudirémos á un medio muy socorrido en muchísimos casos parecidos á este, haremos $(a^2+4y^2)^{\frac{1}{2}} = z$, y $a^2+4y^2 = z^2$; diferenciarémos, y saldrá $8ydy = 2zdz$, cuya cantidad, dividiéndolo todo por 4, dá $2ydy = \frac{zdz}{2}$. Si hacemos en $\frac{2pydy}{a}(a^2+4y^2)^{\frac{1}{2}}$ las substituciones correspondientes, saldrá $\frac{2pydy}{a}(a^2+4y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{pz \cdot zdz}{2a} = \frac{pz^2dz}{2a}$, cuya integral es (608) $\frac{pz^3}{6a}$, y como $z^3 = (a^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}$, síguese que la integral de $\frac{2pydy}{a}(a^2+4y^2)^{\frac{1}{2}}$ es $\frac{p \times (a^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}}{6a}$; completando esta integral como pide el supuesto de $y = 0$ (611), será $\frac{p(a^2+4yy)^{\frac{3}{2}}}{6a} - \frac{pa^2}{6}$ el valor cabal de la superficie del paraboloide.

Fig. 792 Cuestion 4. *Hallar la superficie de un esferoide.*

Figuremos en *ACFHGA* la mitad del esferoide
124. propuesto, engendrado por la revolucion de la semielipse *FAG* al rededor del exe *AH*; y llamemos *AH*, a; *FH* ó *HG*, c; *BH*, x; *BC*, y: *FC*, u. La naturaleza de la curva dará $y = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$; luego $dy = -\frac{cxdx}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}$; y por consiguiente $du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + \frac{c^2x^2dx^2}{a^2(a^2-x^2)})} = \ldots \frac{dx\sqrt{[a^4-(aa-cc)xx]}}{a\sqrt{(a^2-xx)}} = \frac{dx\sqrt{(a^4-b^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}$ (con hacer .. $\sqrt{(a^2-c^2)} = b$) $= \frac{bdx\sqrt{(\frac{a^4}{bb}-x^2)}}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Por consiguiente $2pydu$ será $\frac{2phcdx}{aa}\sqrt{(\frac{a^4}{bb}-x^2)}$, cuya integral expresada con una serie infinita es $2pcx \times (1 - \frac{b^2x^2}{2.3a^4} - \frac{b^4x^4}{2.4.5a^8} - \frac{3b^6x^6}{2.4.6.7a^{12}}$ &c.)

La integral del elemento hallado de la superficie del esferoide se puede sacar mas facilmente por medio de la quadratura del círculo. Porque si desde el centro *H*, y con un radio $= \frac{aa}{b}$ trazamos el circulo *IER*, y prolongamos hasta *E* la ordenada *BC*; es evidente (240) que $BE = \sqrt{(\frac{a^4}{bb} - xx)}$, y que el elemento de la area *EIHB* será $dx\sqrt{(\frac{a^4}{bb}-xx)}$, el qual tendrá con el elemento $\frac{2pbcdx}{aa}\sqrt{(\frac{a^4}{bb}-xx)}$ de la superficie la misma razon que 1 con $\frac{2pbc}{aa}$, y sus integrales tendrán tambien la misma razon. Y como la última expresa la superficie *CFGD*, se sigue que esta superficie es $= \frac{2pbc}{aa} \times BEIFH = 2p \times \frac{FH}{HI} \times BEIFH$.

Es de reparar que esta resolucion sirve para el es-

esferoide prolongado; pero si fuese AH el exe menor, el esferoide engendrado por la semielipse FAG será aplanado, y como AH sería menor que FH, el valor de $b = \sqrt{(a^2 - c^2)}$ sería imposible. Pero si hiciéramos $b = \sqrt{(c^2 - a^2)}$ y $m = \frac{a^2}{b}$, la cantidad $\frac{2phcdx}{a^2} \times \left(\sqrt{\frac{a^4}{bb}} - xx\right)$ sería $= \frac{2pcdx}{m}\sqrt{(m^2 + x^2)} = \frac{2pc}{m} \times \left[dx\sqrt{(m^2 + x^2)}\right]$. La integral de esta diferencial se hallará por medio de los logaritmos; porque podemos transformar la parte variable $dx\sqrt{(m^2 + x^2)}$ Fig.

en $\frac{dx(m^2 + x^2)}{\sqrt{(m^2 + x^2)}} = \frac{m^2 dx + x^2 dx}{\sqrt{(m^2 + x^2)}} = \frac{m^2 x dx + x^3 dx}{\sqrt{(m^2 x^2 + x^4)}} =$

$\frac{\frac{1}{2}m^2 x dx + x^3 dx}{\sqrt{(m^2 x^2 + x^4)}} + \frac{\frac{1}{2}m^2 x dx}{\sqrt{(m^2 x^2 + x^4)}}$; de cuya expresion el primer término se integrará por lo dicho (608), y hallarémos que su integral $= \frac{1}{2}\sqrt{(m^2 x^2 + x^4)}$, y añadiéndole á esta cantidad la integral del otro término $\frac{\frac{1}{2}m^2 x dx}{\sqrt{(m^2 x^2 + x^4)}}$ ó $\frac{\frac{1}{2}m^2 dx}{\sqrt{(m^2 + x^2)}}$, sacarémos $\frac{1}{2}x\sqrt{(m^2 + x^2)} + \frac{1}{2}m^2 \times L.\left[x + \sqrt{(m^2 + x^2)}\right]$, cuya expresion será la integral de $dx\sqrt{(m^2 + x^2)}$. Multiplicándola por $\frac{2pc}{m}$, y practicando lo dicho (611) resultará $\frac{pcx}{m} \times \sqrt{(m^2 + x^2)} + pcm \times L.\left[\frac{x + \sqrt{(m^2 + x^2)}}{m}\right]$, valor de la superficie del esferoide aplanado.

793 Cuestion 5. *Hallar la superficie de un conoide hyperbólico.*

Llamemos a el primer exe de la hypérbola generatriz; c; su conjugado; y x, la distancia entre la ordenada y el centro de la curva. Por la pro-

Fig. piedad de la hypérbola será $y = \frac{c}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)}$, luego $dy = \frac{cxdx}{a\sqrt{(xx - aa)}}$, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ será $\frac{dx\sqrt{[(a^2+c^2)x^2 - a^4]}}{a\sqrt{(xx-aa)}}$, y $2pydu = 2py\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ será $\frac{2pcdx}{aa} \times \sqrt{[(aa+cc)xx - a^4]}$, cuya cantidad, con suponer $\frac{a^4}{a^2+c^2} = m^2$, será $\frac{2pcdx}{m}\sqrt{(x^2 - m^2)}$, de la qual hallarémos la integral por el mismo camino que en la última cuestion, $= \frac{pcx\sqrt{(xx-mm)}}{m} - pcm \times L.\left[x + \sqrt{(x^2 - m^2)}\right]$, y añadiendo la constante hallada con suponer $x = a$, será $\frac{pcx}{m}\sqrt{(xx - mm)} -$

$$pc^2 - pcm \times L.\left[\frac{x + \sqrt{(x^2 - m^2)}}{a + \frac{cm}{a}}\right]$$, verdadero valor

de la superficie del conoide hyperbólico.

117. 794 Cuestion 6. *Hallar la superficie del* groin.

Sea *cgef* una seccion del sólido paralela á su base, y llamemos x la distancia á que está del vértice A; llamemos u el arco correspondiente An de la seccion semicircular NnA; y su radio $AB = BN$, a.

Consta que $du = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ (633), multiplicando esta cantidad por $2\sqrt{(2ax - xx)}$ valor de $ge = 2gn$, resultará $2adx$ (688), elemento de una de las quatro superficies iguales convexâs que terminan el sólido. Luego toda la superficie del sólido, no contando la de la base, será $= 8a^2$, la qual por lo mismo es cabalmente dupla de la base.

PRIN-

PRINCIPIOS

DE TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA.

795 EL asunto de la Trigonometría Esférica, es enseñar como se resuelven los triángulos formados en la superficie de un globo por tres arcos de círculos máxîmos. Esto mismo está diciendo que en esta Trigonometría solo se consideran arcos de círculos máxîmos, por ser la distancia mas corta de un punto á otro en la superficie de una esfera un arco de círculo máxîmo; porque si esta distancia se midiese con arcos de círculos menores, jamas se podria saber su verdadero valor, pues entre dos puntos dados en la superficie de una esfera se pueden tirar una infinidad de arcos de círculos menores, del número de grados que se quiera, siendo así que por dichos dos puntos no se puede tirar mas que un arco de círculo máxîmo.

796 Llámanse *polos* de un círculo máxîmo los dos puntos de la superficie de la esfera que están en los extremos del diámetro que atraviesa perpendicularmente el plano del mismo círculo. El diámetro que pasa por los polos de un círculo se llama el *exe* del mismo círculo.

797 Es evidente que dos círculos máxîmos qualesquiera trazados en la superficie de la esfera se parten uno á otro en dos partes iguales. Porque ambos círculos tienen sus centros en el centro mismo de la esfera; luego se cortan en dicho centro; luego la linea de interseccion ó la seccion comun de los planos de los dos círculos pasa por el centro; es, pues, un diámetro comun á ambos círculos. Pero todo diámetro divide el círculo cuyo es en dos par-

Fig. tes iguales; luego los dos círculos se dividen mútuamente en dos partes iguales.

798 *Si dos círculos máxîmos se cortan perpendicularmente, cada uno de los dos pasa por los polos del otro.*

Porque los polos están en un exe perpendicular al plano del círculo; luego están (I.598) en un plano perpendicular al plano de su círculo, el qual pasa por su centro; luego están en el círculo que le es perpendicular. Lo propio se verifica respecto de dos ó muchos arcos perpendiculares á otro arco, porque todos se encontrarán en el polo de este, ó á 90° de distancia de dicho arco. Recíprocamente, un arco que corta uno ó muchos arcos, á 90° de su interseccion, los corta todos perpendicularmente, pues todos estos círculos pasan por sus polos.

125. 799 Sea *BCF* el diámetro de un globo ó de una esfera, en cuya circunferencia se hayan trazado dos círculos máxîmos *BLFH*, *BMFD*, que se cortan en dos partes iguales en *B* y *F*; si trazamos otro arco *LM* 90° léjos de los puntos *B* y *F*, este arco tendrá sus polos en los puntos *B* y *F*, será la medida de la distancia de los puntos *L* y *M*, y será igual al ángulo que formarian en el centro *C* de la esfera los radios *LC* y *MC* tirados á los puntos *L* y *M*. Luego será igual al ángulo que forman los planos de los dos círculos *BLFHB*, *BAFDB*, ó igual al ángulo que formarian en el punto *B* dos tangentes *GB*, *EB* de los círculos *BM*, *BL*, esto es, al ángulo esférico *LBM*; luego para medir un ángulo esférico *LBM*, se ha de trazar un círculo á la distancia de 90° del vértice *B* del ángulo dado; el arco *LM* comprehendido entre los lados del ángulo, será su medida, y será al mismo tiempo su polo el vértice *B* del mismo ángulo.

800 *En un triángulo esférico rectángulo, los ángu-*

gulos son de la misma especie que los lados opuestos; Fig.
quiero decir, que un ángulo agudo siempre es opuesto á un lado agudo, y un ángulo obtuso á un lado obtuso.

Sea el triángulo *FKI* rectángulo en *K*, cuyo 125.
lado *FK*, y la hypotenusa *FI* se prolonguen hasta el punto *B* opuesto al punto *F*. Los arcos *FKB*, *FIB* serán de 180° cada uno; si *FK* fuere agudo, *KB* será obtuso; y por consiguiente el ángulo *FIK* agudo es opuesto al lado agudo *FK* en el triángulo *FKI*, y el ángulo obtuso *BIK* es opuesto al lado obtuso *BK* en el triángulo *BKI* tambien rectángulo en *K*. Queda, pues, patente que si el lado *FK*, dado en un triángulo esférico rectángulo, pasa de 90°, el ángulo opuesto tambien pasará de 90°.

801 *Si los lados de un triángulo esférico rectángulo fueren de una misma especie, esto es, ambos agudos ó ambos obtusos, la hypotenusa siempre será aguda, y si fueren de distinta especie, la hypotenusa siempre pasará de 90°.*

Es patente que en el triángulo esférico *FIK* rectángulo en *K*, cuyos lados *FK* y *KI* son agudos, la hypotenusa *FI* es tambien aguda; pues si tomamos *FM* de 90°, tambien será *FL* de 90°, porque el arco *LM* tendrá su polo en el punto *F*; luego *FI* no llegará á 90°. Supongamos que en el triángulo *BIK* los lados *BK* y *BI* sean obtusos, y que el ángulo *B* llegue á ser recto, entonces la hypotenusa *KI* será aguda; porque si *BK* y *BI* pasan de 90°, sus suplementos *FK* y *FI* no llegarán á 90°; luego en el triángulo *FIK* tambien rectángulo en *F*, la hypotenusa *IK* será menor que 90°. Pero la hypotenusa *KI* es comun á los dos triángulos; luego el triángulo *BKI* rectángulo en *B*, cuyos dos lados son obtusos, tambien tiene aguda la hypotenusa.

Fig. Si los lados fuesen de diferente especie, como en el triángulo *BIK* que suponemos rectángulo en *K*, cuyo lado *BK* pasa de 90°, y *KI* no llega, la hypotenusa *BI* pasa indispensablemente de 90°, pues entonces su suplemento *IF* es agudo, conforme se ha probado.

802 Si consideramos tambien los triángulos *FKI*, 125. *BKI* rectángulos en *K*, nos haremos cargo, en virtud de lo dicho hasta aquí, que 1.° Si los dos ángulos obliquos fueren de una misma especie, la hypotenusa no llegará á 90°, como en el triángulo *FKI* cuyos dos ángulos son agudos. 2.° Si los dos ángulos obliquos fuesen de especie diferente, como en el triángulo *BKI*, la hypotenusa *BI* será mayor que 90°, porque los dos lados tambien serán de diferente especie. 3.° Si la hypotenusa fuere aguda, los ángulos y los lados serán de la misma especie. 4.° Si la hypotenusa pasare de 90°, los ángulos y los lados serán de diferente especie, como en el triángulo *BIK*, cuyo ángulo *I* es obtuso, y lo son tambien el lado *BK*, y la hypotenusa *BI*, siendo así que el ángulo *B* y el lado *IK* son agudos. 5.° Si la hypotenusa y el uno de los lados fueren de la misma especie, el otro lado y su ángulo opuesto serán indispensablemente agudos, como en el triángulo *BIK*. 6.° Quando la hypotenusa y el uno de los lados fueren de distinta especie, el otro lado y su ángulo opuesto siempre pasarán de 90°; y así, como en el triángulo *BIK* la hypotenusa *BI* es obtusa, y el lado *IK* agudo, el otro lado *BK* no puede menos de ser obtuso, igualmente que su ángulo opuesto *BIK*.

803 La misma figura dará á conocer en los triángulos esféricos rectángulos todos los casos dudosos, esto es, aquellos donde no se puede hallar un lado y un ángulo, á no ser que primero se sepa si

son

son agudos ú obtusos. Los triángulos *FKI*, *BKI*, ambos rectángulos en *K*, tienen comun el lado *IK*; el ángulo *F* del uno es igual al ángulo *B* del otro; pero aunque estas dos cantidades son unas mismas en cada triángulo, todas las demas discrepan, porque la hypotenusa *FI* es aguda, la hypotenusa *BI* es obtusa; el lado *FK* es agudo, el lado *BK* es obtuso; el ángulo *FIK* es agudo, el ángulo *BIK* es obtuso. Por consiguiente, dado un ángulo y su lado opuesto, no se pueden determinar las otras tres partes de un triángulo esférico rectángulo, á no ser que primero se sepa si pasan ó no llegan á 90°. Fig. 125.

804 *Sea* ABC *un triángulo esférico*, FED *otro triángulo esférico, tal que el punto* A *sea el polo del arco* DE; *el punto* C, *el polo del arco* FE; *y el punto* B, *el polo del arco* DF; *cada lado del triángulo* FED *será suplemento del ángulo su opuesto en el triángulo* ABC, *y cada ángulo del mismo triángulo* FED *será suplemento del lado su opuesto en el triángulo* ABC. 126.

Porque, ya que el punto *A* es el polo del arco *DE*, el punto *E* ha de estar 90° léjos del punto *A* (696); por la misma razon, ya que *C* es el polo del arco *FE*, el punto *E* estará 90° léjos del punto *C*; luego (696) el punto *E* es el polo del arco *AC*; del mismo modo probaríamos que *F* es el polo de *BC*, y *D* el polo de *AB*.

Sentado esto, prolónguense los arcos *AB*, *AC* hasta que concurran en *I*, y *L* con el arco *DE*. Ya que el punto *D* es el polo de *ABL*, el arco *DL* es de 90°; y por ser *E* el polo de *ACI*, el arco *EI* es de 90°; luego $DL+EI$, ó $DL+EL+IL$, ó $DE+IL$ vale 180°. Pero *IL* es la medida del ángulo *A* (696), por ser de 90° los arcos *AL*, *AI*; luego $DE+A$ vale 180°; luego *DE* es suplemento dal ángulo *A*. Del mismo modo probarémos que *ID*

es

Fig. es suplemento de B, y FE suplemento de C.

Prolonguémos el arco AC hasta que concurra en N con FE. Los dos arcos AI, CN son cada uno de 90°, pues A y C son los polos de los arcos DE, FE; luego $AI+CN$, ó $AI+AC+AN$, ó $IN+AC$ vale 180°; pero IN es la medida del ángulo E (696), por ser el punto E polo de IN; luego $E+AC$ vale 180°; luego E es suplemento de AC. Del mismo modo probaríamos que D es suplemento de AB, y F es suplemento de CB.

Resolucion de los triángulos esféricos rectángulos.

805 Sea una pirámide $GBPQ$ formada de quatro
127. triángulos rectángulos GBQ, GBP, GPQ, BPQ, y sean AB, AC y BC tres arcos de círculo trazados desde el centro G, y con el radio GB, cada uno, conforme se echa de ver, en un triángulo distinto; es evidente que estos tres arcos de círculo formarán un triángulo esférico BAC rectángulo en A, por ser perpendiculares el uno al otro los dos planos GPQ, GBP. Si suponemos el radio $= 1$, consideramos la hypotenusa como el radio en cada uno de los triángulos rectángulos que forman la pirámide propuesta, y tenemos presente que tang $= \frac{\text{sen}}{\text{cos}}$, y cot $= \frac{\text{cos}}{\text{sen}}$ (I. 717), se sacará fácilmente la tabla siguiente que expresa los valores de todas las partes del expresado triángulo.

I.°

	Tiene por seno.	Por coseno.	Por tangente.
1.° El arco *BC*, ó el ángulo *QGB*.	$\frac{BQ}{GQ}$	$\frac{BG}{GQ}$	$\frac{BQ}{BG}$
2.° El arco *BA*, ó el ángulo *BGP*.	$\frac{BP}{GP}$	$\frac{GB}{GP}$	$\frac{BP}{BG}$
3.° El arco *AC*, ó el ángulo *PGQ*.	$\frac{QP}{GQ}$	$\frac{GP}{GQ}$	$\frac{QP}{GP}$
4.° El ángulo *ABC* ó *QBP*...	$\frac{PQ}{BQ}$	$\frac{BP}{BQ}$	$\frac{QP}{BP}$
5.° El ángulo *BCA*..................	$\frac{BP \times GQ}{BQ \times GP}$	$\frac{QP \times BG}{GP \times BQ}$	$\frac{BP \times GQ}{PQ \times BG}$

Fig.

806 Es facil sacar todas estas expresiones de lo dicho (I.720 y 724), y por esto nos contentarémos con sacar las que forman la primera linea de la tabla. Si tomamos por radio la hypotenusa *GQ*, y hacemos $=$ 1 el radio de las tablas, tendrémos $GQ : QB :: 1 : \text{sen } QGB$, ó sen $BC = \frac{QB}{GQ}$, pues es *BC* la medida del ángulo *QGB*; y $GQ : GB :: 1 : \cos QGB$, ó cos $BC = \frac{GB}{GQ}$. De donde sacarémos tang $BC = \frac{BQ}{BG}$, y cot $BC = \frac{BG}{BQ}$. Solo la última linea de la tabla se saca de las dos primeras proposiciones que vamos á sentar, y se demuestran todas con substituir en cada una separadamente los valores de los términos de cada proporcion que en ella se expresa, y siempre se hallará una perfecta igualdad entre el producto de los medios y el de los extremos. 127.

807 *En todo triángulo esférico* BAC *rectángulo en* A, *el seno total es al seno de la hypotenusa, como el se-*

Fig. *seno de un ángulo es al seno del lado opuesto ; y recíprocamente.*

128. De donde sacarémos R : sen BC :: sen BCA : sen BA ; y substituyendo los valores que dá la tabla, calculados en el supuesto de $R = 1$, tendrémos $1 : \frac{BQ}{GQ}$ :: sen $BCA : \frac{BP}{GP}$, de donde sale sen $BCA = \frac{BP \times QG}{GP \times BQ}$.

808 *En un triángulo esférico* BAC *rectángulo en* A, *el radio es al coseno de un ángulo, como la tangente de la hypotenusa es á la tangente del lado adyacente á dicho ángulo*; quiero decir R : *cos* B :: *tang* BC : *tang* AB, *ó* R : *cos* C :: *tang* BC : *tang* AC.

De esta proposicion sacarémos la expresion del coseno de BCA qual está en la tabla ; porque con executar en la segunda proporcion las substituciones correspondientes por medio de la tabla, tendrémos 1 : cos C :: $\frac{BQ}{BG} : \frac{QP}{GP}$; de donde sale cos C, ó cos $BCA = \frac{QP \times BG}{GP \times BQ}$. Con esto será facil hallar la expresion de la tangente y cotangente de dicho ángulo.

809 *En todo triángulo rectángulo, el seno total es al coseno del uno de los lados, como el coseno del otro lado es al coseno de la hypotenusa* ; esto es, R : *cos* AB :: *cos* AC : *cos* BC.

810 *El radio es al seno de un ángulo, como el coseno del lado adyacente es al coseno del otro ángulo*; esto es, R : *sen* B :: *cos* AB : *cos* C, *ó* R : *sen* C :: *cos* AC : *cos* B.

811 *El radio es al seno de un lado, como la tangente del ángulo adyacente á dicho lado es á la tangente del otro lado*, *ó* R : *sen* AB :: *tang* B : *tang* AC ; *ó* R : *sen* AC :: *tang* C : *tang* AB.

812 *El radio es á la cotangente de un ángulo, como la cotangente del otro ángulo es al coseno de la hy-*

hypotenusa; ó, lo que viene á ser lo mismo, *el radio es al coseno de la hypotenusa, como la tangente de un ángulo es á la cotangente del otro ángulo*; quiero decir *que* R : *cot* B :: *cot* C : *cos* BC, *ó* R : *cos* BC :: *tang* B : *cot* C :: *tang* C : *cot* B. Fig.

813 De lo dicho (708) inferirémos que si dos triángulos esféricos *ABC*, *ABD* ambos rectángulos en *B* tuvieren un lado *AB* comun, las tangentes de las hypotenusas estarán en razon inversa de los cosênos de los ángulos adyacentes al lado comun. 129.

Porque, de la proposicion citada se sigue que *R* : cos *CAB* :: tang *CA* : tang *AB*, y *R* : cos *BAD* :: tang *DA* : tang *AB*. Multiplicando los extremos y medios de las dos proporciones, sacarémos cos *CAB* × tang *CA* = *R* × tang *AB* = cos *BAD* × tang *DA*; luego tang *CA* : tang *DA* :: cos *BAD* : cos *CAB*.

814 De lo probado (709) se deduce, que si dos triángulos esféricos rectángulos tuvieren un lado comun, los cosenos de sus hypotenusas serán como los cosenos de los lados no comunes.

Porque, en virtud de la proposicion citada será *R* : cos *AB* :: cos *BC* : cos *AC*, y *R* : cos *AB* :: cos *BD* : cos *AD*. Luego cos *BC* : cos *BD* :: cos *AC* : cos *AD*.

815 De lo dicho (710) inferirémos que si dos triángulos esféricos rectángulos tuviesen un lado comun, los cosenos de los ángulos opuestos á dicho lado serán como los senos de los ángulos adyacentes.

Porque, en virtud de la proposicion citada tendrémos *R* : sen *CAB* :: cos *AB* : cos *C*, y *R* : sen *BAD* :: cos *AB* : cos *D*; ó sen *CAB* : cos *C* :: *R* : cos *AB* :: sen *BAD* : cos *D*, y por consiguiente cos *C* : cos *D* :: sen *CAB* : sen *BAD*.

816 De lo probado (711) se sigue que quando dos triángulos rectángulos tienen un lado comun, los senos de los lados no comunes serán recíprocamente como las tangentes de los ángulos de los lados.

Por-

Fig. Porque, de la proposicion citada sacarémos R : sen CB :: tang C : tang AB, y R : sen BD :: tang D :
129. tang AB. Luego sen $CB \times$ tang $C = R \times$ tang $AB =$ sen $BD \times$ tang D, y por consiguiente sen CB : sen BD :: tang D : tang C.

817 De lo probado (707 y 711) se infiere que
130. si dos triángulos esféricos ABC, BDC rectángulos el primero en B, y el otro en D, tienen un ángulo comun C.

1.° Los senos de sus hypotenusas serán como los senos de los lados opuestos al ángulo comun; porque de lo dicho (707) sacarémos R : sen AC :: sen C : sen AB, ó R : sen C :: sen AC : sen AB, y R : sen CB :: sen C : sen BD, ó R : sen C :: sen CB : sen BD. Luego sen AC : sen CB :: sen AB : sen BD.

2.° Las tangentes de los lados opuestos al ángulo comun serán como los senos de los lados adyacentes al ángulo comun. Porque de lo dicho (711) resulta que R : sen BC :: tang C : tang AB, y R : sen DC :: tang C : tang BD; de donde será facil sacar tang AB : tang BD :: sen BC : sen DC.

818 Por medio de las proposiciones sentadas se resuelven todos los casos posibles de los triángulos esféricos rectángulos, conforme lo manifiesta la tabla adjunta.

Resolucion de los triángulos esféricos obliquángulos.

819 Quando las tres partes de un triángulo esférico están colocadas de manera que dos de ellas tocan inmediatamente la tercera, ó no están separadas de ella sino por el ángulo recto, dichas dos partes se llaman *adyacentes* á la tercera que llamarémos *parte media*.

820 Quando las tres partes de un triángulo rectángulo están dispuestas de tal modo que entre una de

Tabla para la resolucion de todos los casos posibles de los triángulos esféricos rectángulos (718).

Datos.	*Busco.*	*Valores.*	*Casos en que lo que se busca no llega á 90°.*
A Hypotenusa y un lado.	Angulo opuest. al lado dado.	Su *sen* $=\frac{sen \text{ lado dado}}{sen \text{ hypot.}}$ (707)	Si los datos son de una misma especie.
	Angulo adyac. al lado dado.	Su *cos* $=\frac{tang \text{ lad. dado}}{tang \text{ hypot.}}$ (708)	Lo mismo.
	El otro lado.	Su *cos* $=\frac{cos \text{ hypot.}}{cos \text{ lad. dado}}$ (709)	Si el lado dado no llega á 90°.
B Un lado y el ángulo opuesto.	Hypotenusa.	Su *sen* $=\frac{sen \text{ lad. dado}}{sen \text{ áng. dado}}$ (707)	Dudoso.
	El otro lado.	Su *sen* $=\frac{tang \text{ lad. dado}}{tang \text{ áng. dado}}$ (711)	Dudoso.
	El otro ángulo.	Su *sen* $=\frac{cos \text{ áng. dado}}{cos \text{ lad. dado}}$ (710)	Dudoso.
C Un lado y el ángulo adyacente.	Hypotenusa.	Su *tang* $=\frac{tang \text{ lad. dado}}{cos \text{ áng. dado}}$ (708)	Si los datos son de una misma especie.
	El otro ángulo.	Su *cos* = *cos* lad. dado × *sen* áng. dado (710) . . .	Si el lado dado es menor que 90°.
	El otro lado.	Su *tang* = *sen* lad. dado × *tang* áng. dado (711) . . .	Si el ángulo dado fuere menor que 90°.
D La hypotenusa y un ángulo.	Lado adyac.	Su *tang* = *tang* hyp. × *cos* áng. dado (708)	Si el áng. dado fuere agudo.
	Lado op. al ángulo dado.	Su *sen* = *sen* hyp. × *sen* áng. dado (707)	Si los datos fueren de una misma especie.
	El otro ángulo.	Su *tang* $=\frac{cot \text{ áng. dado}}{cos \text{ hypot.}}$ (712)	Si la hypotenusa fuere menor que 90°.
E Los dos lados.	Hypotenusa.	Su *cos* = rectáng. *cos* lados dados (709)	Si los datos fuesen de una misma especie.
	Un ángulo.	Su *tang* $=\frac{tang \text{ lado opuesto}}{sen \text{ lado adyac.}}$ (711)	Si el lado opuesto fuere agudo.
F Los dos ángulos.	Hypotenusa.	Su *cos* = rectáng. *cot* áng. dados (712)	Si los datos fueren de una misma especie.
	Un lado.	Su *cos* $=\frac{cos \text{ áng. opuesto}}{sen \text{ áng. adyac.}}$ (710)	Si el ángulo opuesto fuere agudo.

de las tres, que mirarémos como parte media, y cada Fig.
una de las otras dos haya siempre otra parte del mismo triángulo; dichas dos partes se llaman *partes separadas*. Consideramos el ángulo recto como que no separa las partes entre las quales está.

Si en el triángulo *BAC* rectángulo en *A* 128.

Las partes medias fuesen		Las adyacentes serán		Y las separadas.	
	AB		*AC* y *B*		*BC* y *C*
	AC		*AB* y *C*		*BC* y *B*
	BC		*B* y *C*		*AC* y *AB*
	B		*AB* y *BC*		*AC* y *C*
	C		*AC* y *BC*		*AB* y *B*

821 Es evidente que si *MDA* fuere el suplemento 131.
de *BM*, el seno *ME* de la mitad de *MDA* será igual á *CF* coseno de la mitad *BG* del arco *BM*.

822 *En todo triángulo esférico* BAC, *los senos de los ángulos tienen unos con otros la misma razon que los senos de los lados opuestos.* 132.

Baxemos, para probarlo, desde un ángulo qualquiera *A* del triángulo esférico *BAC* el arco *AD* perpendicular á la base *BC*. Será, pues, y por lo dicho *R* : sen *AB* : sen *B* : sen *AD*, y *R* : sen *AC* :: sen *C* : sen *AD*. De aquí sacarémos sen *AB* × sen *B* = sen *AC* × sen *C*, lo que da esta proporcion sen *B* : sen *C* :: sen *AC* : sen *AB*.

1.° A los ángulos *BAD*, *CAD* que forman los lados *AB*, *AC* del ángulo *BAC* con la perpendicular, los llamarémos *segmentos del ángulo vertical*, ora caiga la perpendicular dentro, ora caiga fuera del triángulo *BAC*.

2.° Llamarémos *segmentos de la base* las partes *BD* y *DC* del lado *BC* que están entre los puntos *B* y *C*, y el punto *D* donde la perpendicular *AD* encuentra dicho lado, esté prolongada ó no la expresada base.

3.°

Fig. 3.° Si consideramos los segmentos BAD, CAD del ángulo BAC, los lados AB, AC de dicho ángulo
132. se llamarán partes adyacentes, porque lo son con efecto. Los ángulos B y C de la base BC serán las partes separadas, porque entre dichos ángulos y los segmentos median los lados BA y CA.

4.° Si consideramos los segmentos BD y CD de la base, los ángulos B y C serán las partes adyacentes, y los lados BA y CA serán las partes separadas, respecto de los mismos segmentos de la base.

823 Si desde un ángulo qualquiera A de un triángulo esférico BAC baxamos una perpendicular AD al lado BC, prolongado, si fuere menester; siempre se verificará:

1.° *Que habrá la misma razon entre los senos de los segmentos del ángulo, que entre los cosenos de las partes separadas; quiero decir, que sen* BAD : *sen* CAD :: *cos* B : *cos* C.

Porque el triángulo rectángulo BDA dará (710) R : cos AD :: sen BAD : cos B; y el triángulo rectángulo CDA dará tambien R : cos AD :: sen CAD : cos C; luego sen BAD : sen CAD :: cos B : cos C.

2.° *Habrá entre los cosenos de los segmentos la misma razon que entre las cotangentes de las partes adyacentes; quiero decir, que cos* BAD : *cos* CAD :: *cot* AB : *cot* AC.

Porque será (708) R : cos BAD :: tang BA : tang AD :: $\frac{1}{\cot BA}$: $\frac{1}{\cot AD}$ (I. 717) :: cot AD : cot BA (I.86); luego R : cos BAD :: cot AD : cot BA. Del mismo modo probaríamos que R : cos CAD : cot AD :: cot CA. Luego R : cot AD :: cos BAD : cot BA, y R : cot AD :: cos CAD : cot CA. Luego cos BAD : cos CAD :: cot AB : cot AC.

3.° *Hay una misma razon entre los senos de los segmentos de la base, que entre las cotangentes de las*

las partes adyacentes; quiero decir, que sen BD : *sen* CD :: *cot* B : *cot* C.

Porque el triángulo BDA dará (711) R : sen BD :: tang B : tang AD :: $\frac{1}{\cot B}$: $\frac{1}{\cot AD}$ :: cot AD : cot B; y del triángulo CDA inferiríamos tambien R : sen CD :: cot AD : cot C; luego ya que son unos mismos los antecedentes en ambas proporciones, será sen BD: sen CD :: cot B : cot C.

4.° *Hay la misma razon entre los cosenos de los segmentos de la base, que entre los cosenos de las partes separadas; quiero decir, que cos* BD : *cos* CD :: *cos* AB : *cos* AC.

Porque en el triángulo BAD tenemos (709) R : cos BD :: cos AD : cos BA. Y por lo mismo tambien tendrémos en el triángulo CDA, R : cos CD :: cos AD : cos AC; luego finalmente cos BD : cos CD :: cos BA : cos AC.

824 Sea BAC un triángulo esférico qualquiera estando uno de sus lados AB en la circunferencia de un círculo máxîmo $ABRFar$; vamos á enseñar como se puede trazar en el plano del expresado círculo máximo la *proyeccion ortográfica* del triángulo ACB; esto es, la figura que resulta de las lineas tiradas desde los puntos de los lados del triángulo ABC perpendicularmente al plano $ABRar$.

Desde los extremos A, B del arco AB tírense al centro G los radios GA y GB. Por el mismo centro G, que lo es tambien de la esfera, concibamos que pase un plano ó círculo máximo $rDRO$ perpendicular al plano $ARar$, cuya comun seccion Rr con el plano del mismo círculo sea perpendicular al radio GA; finalmente prolónguese el arco AC hasta que encuentre la circunferencia $rDRo$ en un punto D, desde el qual se tirará tambien el centro G la linea DG, y la linea Dd perpendicular al diámetro Rr.

Esto presupuesto, es evidente (I.599) que el ángulo *DGR* es el mismo que el ángulo *BAC* formado del concurso de los planos *BAG*, *CAG*; por ser ambas lineas *DG*, *RG* perpendiculares á la interseccion comun *AG*; y el angulo *DGr* es igual al suplemento del mismo ángulo *BAC*. Es tambien patente que si por el punto *C* tiramos una linea *Cc* perpendicular al mismo plano *ARar*, el punto *c* será la proyeccion del ángulo *C*; y si por la linea *Cc* hacemos que pase un plano *lCL* paralelo al plano *rDRo*, la interseccion *lL* de este círculo menor, y del círculo máxîmo *ARar* será tambien perpendicular al radio *AG*, y determinará los arcos *AL*, *Al* iguales al arco *AC*, y la proyeccion del punto *C* estará en uno de los puntos de dicha linea. Tambien estará por la misma razon en una linea *Ff* interseccion del círculo máxîmo *ARar*, y de un círculo menor *fCF* perpendicular al plano del mismo círculo máxîmo, cuya linea *Ff* tambien será perpendicular al radio *BG*, y determinará los arcos *BF*, *Bf*, ambos iguales al arco *BC*. Esto manifiesta como se puede determinar en un instante la proyeccion del ángulo *C* por medio de la interseccion comun de las lineas *Ll*, *Ff* en el plano del círculo *ARar*, siendo conocidos los tres lados del triángulo *ABC*.

725 De lo que acabamos de probar se sigue, que por ser semejantes los triángulos rectángulos *DdG*, *CcH*, pues son paralelas unas con otras respectivamente las lineas que los forman, será $DG : CH$, ó $rG : lH :: dG : cH$; esto es, R : sen AC :: cos $BAC : cH$; y como sacaríamos la misma proporcion para cada uno de los puntos proyectados del arco *AC*, se deduce que la proyeccion de dicho arco en el plano del círculo *ARar* es (293) una elipse, cuyo semiexe mayor es *AG*, y *DG* el semiexe menor.

Lue-

826 Luego la proyeccion ortográfica de un círculo qualquiera es una elipse, ó una porcion de elipse, cuyo semiexe mayor es igual al seno total, y el semiexe menor es igual al coseno del ángulo que forman uno con otro el plano donde está el círculo, y el plano donde se ha de trazar su proyeccion ortográfica. Todo esto sentado, digo que

827 *En todo triángulo esférico* BAC *siempre se verificará esta proporcion. El producto de los senos de los lados* AB, AC *de un ángulo qualquiera* BAC, *es al producto de los senos de las diferencias que van de cada uno de dichos lados á la semisuma de los tres lados; como el quadrado del radio es al quadrado del seno de la mitad del ángulo*; esto es, $sen\,AB \times sen\,AC : sen\left(\frac{AB+AC+BC}{2} - AC\right) \times sen\left(\frac{AB+AC+BC}{2} - AB\right) :: R^2 : sen^2\left(\frac{1}{2}BAC\right)$.

Antes que probemos esta proposicion, se nos hace preciso considerar, que si en el plano del círculo *ABRa* tomamos al uno y otro lado del punto *A* los arcos *AL*, *Al* cada uno igual al arco *AC*, y tambien al uno y otro lado del punto *B* los arcos *BF*, *Bf* cada uno igual al arco *BC*, y tiramos las cuerdas *Ll*, *Ff* respectivamente perpendiculares á los radios *GA*, *GB*; la interseccion *C* de estas dos cuerdas será (724) la proyeccion del ángulo *C* del triángulo *BAC*. De la misma construccion resultará igualmente que $BL = AC - AB$, y $Bl = AC + AB$. Tambien será $LF = BF - BL = BC - AC + AB$; $lf = Bl - Bf = AB + AC - BC$, y $Lf = Bf + BL = BC + AC - AB$. A mas de esto, hagamos (725) esta proporcion $Hl : CH :: Gr : Gd$; ó lo que es lo mismo, tómese en la *Gr* una parte *Gd* quarta proporcional á las tres lineas *Hl*, *CH* y *Gr*, cuya linea será el coseno del ángulo *BAC*. Por consiguiente si en el punto *d* levantamos una recta *Dd*

perpendicular al radio Gr, está será el seno del ángulo RGD que será igual al ángulo BAC, y le determinará. Finalmente, tírense desde el punto D á los extremos del diámetro Rr las cuerdas DR, Dr; báxense á esta cuerda desde el centro G las perpendiculares GS, Gs; y desde los puntos S, s las perpendiculares SV, su al diámetro Rr; en virtud de todo esto será patentemente RS el seno de la mitad del ángulo BAC; y rs será el seno de la mitad del suplemento del ángulo BAC, ó el coseno de la mitad de dicho ángulo (721).

Todo esto sentado, es constante desde luego que por haber entre los senos de los ángulos de un triángulo rectilineo la misma razon que entre los lados (I.731), serán tambien los senos de los ángulos del triángulo rectilineo CLF como las mitades de los lados, pues hay entre las mitades la misma razon que entre los todos. Es tambien constante que el ángulo LCF es igual al ángulo AGB por lo dicho (I.418), y por los valores sacados poco ha de los lados LF y lf. Por consiguiente tendrémos esta proporcion sen C ó sen AB : sen F :: $\frac{1}{2}LF : \frac{1}{2}CL$. De la proporcion que hay entre las lineas GR, HL, Gd, CH sacarémos $HL : GR :: CH : Gd$; ó $HL : CH :: GR : Gd$; luego (I.158) $HL : CH+HL :: GR : Gd+GR$; esto es, $HL : GR :: CL : dR :: \frac{1}{2}CL : \frac{1}{2}dR = VR$; porque en los triángulos semejantes RDd, RSV, siendo RS la mitad de RD, será RV la mitad de Rd. Y por estar las lineas GR, RS, RV en proporcion continua (I.522 3.°), tendrémos (I.210) $GR : RV :: (GR)^2 : (RS)^2$; son, pues, las tres proporciones que hemos sacado

$$\text{sen } AB : \text{sen } F :: \tfrac{1}{2}LF : \tfrac{1}{2}CL,$$
$$HL : GR :: \tfrac{1}{2}CL : VR,$$
$$GR : VR :: (GR)^2 : (RS)^2,$$

multiplicándolas ordenadamente, y borrando las

can-

cantidades comunes á los antecedentes y á los consecuentes, resultará sen $AB \times HL$: sen $F \times VR$ :: $\frac{1}{2}LF \times (GR)^2 : VR \times (RS)^2$, ó sen $AB \times HL$: sen $F \times \frac{1}{2}LF$ :: $(GR)^2 : (RS)$. Y como $HL =$ sen AC, sen $F = \frac{1}{2}LAf =$ sen $\left(\frac{BC+AC-AB}{2}\right) =$ sen $\left(\frac{BC+AC+AB}{2} - AB\right)$, y $\frac{1}{2}LF =$ (I.704) sen $\frac{1}{2}LRF =$ sen $\left(\frac{BC+AB-AC}{2}\right) =$ sen $\left(\frac{BC+AB+AC}{2} - AC\right)$. Luego si substituimos estos valores, la última proporcion se transformará en sen $AB \times$ sen AC : sen $\left(\frac{BC+AB+AC}{2} - AB\right) \times$ sen $\left(\frac{BC+AC+AB}{2} - AC\right) :: R^2 :$ sen$^2 \frac{1}{2}BAC$.

828 Suponiendo la misma construccion que en la última proposicion; tambien se verificará en todo triángulo esférico BAC la siguiente analogía.

El producto de los senos de los lados AB, AC *de un ángulo qualquiera, es al producto del seno de la semisuma de los dos lados y del lado opuesto por el seno de la semidiferencia que va de dichos dos lados al tercero, como el quadrado del radio es al quadrado del coseno de la mitad del ángulo que forman*; quiero decir, *que sen* AB $\times$ *sen* AC : *sen* $\left(\frac{AC+AB+BC}{2}\right) \times$ *sen* $\left(\frac{AB+AC-BC}{2}\right) :: R^2 : \cos^2 \frac{1}{2}BAC$.

Porque en el triángulo Clf los senos de los ángulos tienen unos con otros la misma razon que las mitades de los lados opuestos; pero es evidente que el ángulo en f tiene por medida (I.413) la mitad del arco FDl, suplemento de la mitad del arco FAl igual á la mitad de la suma de los tres lados AC, AB, BC. El arco fl, segun probamos poco ha (727) $= AC+AB-BC$, y por consiguiente la mitad de su cuerda será el seno de la mitad de dicho arco. Sentado esto, una vez que hay entre los senos la misma razon que entre los lados opuestos; y que sien-

siendo el ángulo $lCf = LCF$, será tambien igual al ángulo AGB, por lo probado poco ha (727), tendrémos sen AB : sen f :: $\frac{1}{2}lf$: $\frac{1}{2}Cl$; por construccion $HL : Gr :: \frac{1}{2}Cl : \frac{1}{2}dr = ur$, y por estar (I.522, 3.°) en proporcion continua las lineas Gr, rs, ru, será $Gr : ur :: (Gr)^2 : (rs)^2$ (I.210) Luego multiplicando ordenadamente los términos de estas tres proporciones, sacarémos sen $AB \times Hl$: sen f :: $\frac{1}{2}lf \times (Gr)^2 : (rs)^2$, ó sen $AB \times Hl$: sen $f \times \frac{1}{2}lf :: (Gr)^2 : (rs)^2$; y substituyendo los valores de cada linea sacarémos finalmente sen $AB \times$ sen AC : sen $\left(\frac{AB+AC+BC}{2}\right) \times$ sen $\left(\frac{AB+AC-BC}{2}\right) :: R^2 : \cos^2 \frac{1}{2}BAC$. Es muy facil de probar que $(rs)^2 = \cos^2 \frac{1}{2}BAC$, porque se viene á los ojos que $rs = SD = GS = \cos RGS = \cos \frac{1}{2}RGD = \cos \frac{1}{2}BAC$.

829 Síguese de lo probado (727 y 729) que si llamamos s la suma de los tres lados; a, el lado opuesto al ángulo que se pide; b y c respectivamente, los dos lados que forman dicho ángulo será

$$\text{sen } \tfrac{1}{2} \text{ ángulo} = \frac{r\sqrt{\left[\text{sen}\left(\frac{s}{2} - b\right) \times \text{sen}\left(\frac{s}{2} - c\right)\right]}}{\sqrt{(\text{sen } b \times \text{sen } b)}}$$

$$\text{sen } \tfrac{1}{2} \text{ ángulo} = \frac{r\sqrt{\left[\text{sen}\left(\frac{b+c+a}{2}\right) \times \text{sen}\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\right]}}{\sqrt{(\text{sen } b \times \text{sen } c)}}$$

$$\frac{r\sqrt{\left[\text{sen } \frac{1}{2}s \times \text{sen}\left(\frac{1}{2}s - a\right)\right]}}{\sqrt{(\text{sen } b \times \text{sen } c)}}$$, porque $\frac{b+c-a}{2} = \frac{b+c+a}{2} - a$.

830 Quando los dos lados que forman el ángulo que se pide son iguales, $b = c$, y $AC = AB$. Entonces $\frac{1}{2}s - b = \frac{s-2b}{2} = \frac{BC+2AB}{2} - AB = \frac{1}{2}BC$, y $\frac{1}{2}s - b = \frac{1}{2}s - c$; por consiguiente $\sqrt{\left[\text{sen}\left(\frac{1}{2}s - b\right)\right.}$ ×

$\times$ sen $(\frac{1}{2}s - c)] =$ sen $\frac{1}{2}BC$, y sen $\frac{1}{2}$ ángulo $=$

$$\frac{r \times \text{sen } \frac{1}{2}BC}{\text{sen } b}.$$

En el mismo supuesto será

$$\cos \tfrac{1}{2} \text{ ángulo} = \frac{r\sqrt{\text{sen }(b+\frac{1}{2}a) \times \text{sen}(b-\frac{1}{2}a)}}{\text{sen } b}.$$

831 De un triángulo esférico qualquiera *ABC*, cuyos tres ángulos son conocidos siempre, sacarémos la siguiente analogía.

El producto de los senos de los ángulos adyacentes á un lado, es al producto de los cosenos de las diferencias que hay entre cada uno de dichos ángulos y la semisuma de los tres ángulos, como el quadrado del radio es al quadrado del coseno de la mitad del lado que se busca; quiero decir, que sen B $\times$ *sen* C : $\cos\left(\frac{A+B+C}{2} - B\right) \times \cos\left(\frac{A+B+C}{2} - C\right) :: R^2 : \cos^2 \frac{1}{2}BC$.

Y tambien sacarémos estotra analogía.

El producto de los senos de los ángulos adyacentes á un lado es al producto del coseno de la semisuma de dichos dos ángulos y del tercero, por el coseno de la semidiferencia que va de dichos dos ángulos al tercero; como el quadrado del radio es al quadrado del seno de la mitad del lado que se busca; quiero decir, que sen B $\times$ *sen* C : $\cos\left(\frac{B+C+A}{2}\right) \times \cos\left(\frac{B+C-A}{2}\right) :: R^2 : \text{sen}^2 \frac{1}{2}BC$.

Porque en el triángulo suplementario *DEF* se verificará (727) sen *FD* $\times$ sen *EF* : sen $\left(\frac{DF+FE+DE}{2} - DF\right) \times$ sen $\left(\frac{DF+FE+DE}{2} - FE\right) :: R^2 :$ sen$^2 \frac{1}{2} DFE$.

Pero los arcos *FD*, *FE* son (704) los suple-

mentos de los ángulos *B* y *C* del triángulo *BAC*; serán por consiguiente (I.711) sus senos los mismos que los del ángulo *B* y *C*. Y como el seno de la mitad del suplemento de un ángulo ó de un arco es (721) igual al coseno de la mitad de dicho arco ó ángulo, con executar en el segundo término las substituciones correspondientes, se transformará en $\cos\left(\frac{A+B+C}{2}-B\right) \times \cos\left(\frac{B+C+A}{2}-C\right)$. Finalmente, por ser el ángulo *DFE* suplemento del lado *BC*, su mitad será el complemento de la mitad de dicho lado, y su seno será el coseno de la mitad del lado *BC*. Luego la proporcion antecedente se transformará en estotra $\text{sen}\,B \times \text{sen}\,C : \cos\left(\frac{B+C+A}{2}-B\right) \times \cos\left(\frac{A+B+C}{2}-C\right) :: R^2 : \cos^2 \frac{1}{2}BC$.

2.° En el mismo triángulo *DEF* se verificará por lo dicho (728) $\text{sen}\,FD \times \text{sen}\,FE : \text{sen}\left(\frac{DF+FE+DE}{2}\right) \times \text{sen}\left(\frac{DF+FE-DE}{2}\right) :: R^2 : \cos^2 \frac{1}{2}DFE$; y si executamos en esta proporcion las mismas substituciones que en la antecedente, se transformará en estotra $\text{sen}\,B \times \text{sen}\,C : \cos\left(\frac{B+C+A}{2}\right) \times \cos\left(\frac{B+C-A}{2}\right) :: R^2 : \text{sen}^2\frac{1}{2}BC$.

832 Luego si llamamos *s* la suma de los tres ángulos de un triángulo; *a*, *b*, *c* los tres ángulos; suponiendo que los ángulos *b*, *c* son adyacentes al lado que se busca, tendrémos las siguientes fórmulas.

$$\text{Sen}\ \tfrac{1}{2}\ \text{lado} = \frac{r\sqrt{\left[\cos \frac{1}{2}s \times \cos\left(\frac{1}{2}s - a\right)\right]}}{\sqrt{(\text{sen}\ b \times \text{sen}\ c)}}$$

$$\text{y}\ \cos \tfrac{1}{2}\ \text{lado} = \frac{r\sqrt{\left[\cos\left(\frac{1}{2}s - b\right) \times \cos\left(\frac{1}{2}s - c\right)\right]}}{\sqrt{(\text{sen}\ b \times \text{sen}\ c)}}$$

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ \text{lado} = \frac{r\sqrt{\left[\cos \frac{1}{2}s \times \cos\left(\frac{1}{2}s - b\right)\right]}}{\sqrt{\left[\cos\left(\frac{1}{2}s - b\right) \times \cos\left(\frac{1}{2}s - c\right)\right]}}$$

Si

Tabla para la resolucion de los triángulos esféricos obliquángulos (733).

I segm. ó II segm. quiere decir primero ó segundo segmento del ángulo ó del lado dividido con la perpendicular.

Datos.	*Se busca.*		*Valores.*
A Dos ángulos y un lado op. al uno de dichos ángulos.	El lado op. al otro áng.	*Por la analogía comun.*	Los *senos* de los áng. son como los *senos* de los lados opuestos (722).
	Tercer lado.	*Báxese una perpendicular al lado que junta los ángulos dados.*	*Tang* I segm. del lado $=$ *cos* áng. adyac. $\times$ *tang* lado dado (707). *Sen* II segm. $= \frac{\textit{sen}\ \text{I segm.} \times \textit{tang}\ \text{áng. ady. al lado dado}}{\textit{tang}\ \text{áng. op. al mismo lado dado}}$ (723 *n.* 3.°).
	Tercer ángulo.	*Sirve la misma perpendicular.*	*Cot* I segm. áng. $=$ *cos* lado dado $\times$ *tang* áng. ady. (712). *Sen* II segm. del mismo áng. $= \frac{\textit{sen}\ \text{I segm.} \times \textit{cos}\ \text{áng. op. al lado dado}}{\textit{cos}\ \text{áng. ady. al lado dado}}$ (723 1.°).
B Dos lados y un ángulo opuesto al uno de estos lados.	El áng. opuesto al otro lado.	*Por la analogía comun.*	Los *senos* de los lados son como los de los áng. op. (722).
	Áng. comprehend. entre los lados dados.	*Báxese una perpendic. desde el áng. que forman los lados dados.*	*Cot* I segm. áng. busc. $=$ *tang* áng. dado $\times$ *cos* lad. ady. (712). *Cos* II segm. del mismo áng. $= \frac{\textit{cos}\ \text{I segm.} \times \textit{tang}\ \text{lado dado ady. al áng. dado}}{\textit{tang}\ \text{lado op. al áng. dado}}$ (713).
	Tercer lado.	*Sirve la misma perpendicular.*	*Tang* I segm. de este lado $=$ *cos* áng. dado $\times$ *tang* lado ady. á dicho áng. (707). *Cos* II segm. del mismo lado $= \frac{\textit{cos}\ \text{I segm.} \times \textit{cos}\ \text{lado op. al áng. dado}}{\textit{cos}\ \text{lado ady. al áng. dado}}$ (723 4.°).
C Dos lados y el ángulo que forman.	Un áng. op. al uno de los lados dados.	*Báxese una perp. desde el áng. que no se busca.*	*Tang* I segm. lad. divid. $=$ *cos* áng. dado $\times$ *tang* lado op. al áng. dado (707). *Tang* áng. pedido $= \frac{\textit{tang}\ \text{áng. dado} \times \textit{sen}\ \text{I segm.}}{\textit{sen}\ \text{II segm. del lado dividido}}$ (723 3.°).
	El tercer lado.	*Báxese una perp. al uno de los lados dados.*	*Tang* I segm. del lado divid. $=$ *cos* áng. dado $\times$ *tang* lado no divid. (707). *Cos* lado pedido $= \frac{\textit{cos}\ \text{lado no divid.} \times \textit{cos}\ \text{II segm.}}{\textit{cos}\ \text{I segm. del lado divid.}}$ (723 4.°).
D Un lado y los dos áng. ady. al mismo lado.	Un lado op. al uno de los ángulos dados.	*Báxese una perpendic. al lado que no se busca.*	*Cot* I segm. del áng. divid. $=$ *cos* lado dad. $\times$ *tang* áng. op. al lad. ped. (712). *Tang* lado ped. $= \frac{\textit{tang}\ \text{lado dad.} \times \textit{cos}\ \text{I segm. áng. divid.}}{\textit{cos}\ \text{II segm. del mismo áng.}}$ (723 2.°).
	Tercer ángulo.	*Báxese una perp. desde el uno de los áng. dados.*	*Cot* I segm. áng. divid. $=$ *cos* lado dad. $\times$ *tang* áng. dado no divid. (712). *Cos* áng. pedid. $= \frac{\textit{cos}\ \text{áng. no divid.} \times \textit{sen}\ \text{II segm.}}{\textit{sen}\ \text{I segm. del áng. divid.}}$ (723 1.°).
E Los tres lados.	Sean A, B, C los tres lados cuya suma $= s$; B y C los adyac. al áng. pedido.		
	Un áng. por el *sen*, ó *cos* de su mitad.		*Sen* $\frac{1}{2}$ áng. $= \frac{r \times \sqrt{[\text{sen}(\frac{1}{2}s - B) \times \text{sen}\frac{1}{2}(s - C)]}}{\sqrt{(\text{sen}\ B \times \text{sen}\ C)}}$ (729); *cos* $\frac{1}{2}$ áng. $= \frac{r \times \sqrt{[\text{sen}\frac{1}{2}s \times \text{sen}(\frac{1}{2}s - A)]}}{\sqrt{(\text{sen}\ B \times \text{sen}\ C)}}$ (729).
F Los tres ángulos.	Sean a, b, c los tres ángulos cuya suma $= s$; B y C los adyacentes al lado pedido.		
	Un lado por el *sen*, ó *cos* de su mitad.		*Sen* $\frac{1}{2}$ lado $= \frac{r \times \sqrt{[\cos\frac{1}{2}s \times \cos(\frac{1}{2}s - a)]}}{\sqrt{(\text{sen}\ b \times \text{sen}\ c)}}$ (732). *Cos* $\frac{1}{2}$ lado $= \frac{r\sqrt{[\cos(\frac{1}{2}s - b) \times \cos(\frac{1}{2}s - c)]}}{\sqrt{(\text{sen}\ b \times \text{sen}\ c)}}$ (732).

833 Si fuesen iguales los dos ángulos adyacentes, sacaríamos de lo probado en la primera parte de la proposicion (730) $\text{sen}^2 B : \cos^2 \frac{1}{2}A :: R^2 : \cos^2 \frac{1}{2}BC$; y sacando las raices $\cos \frac{1}{2} BC = \frac{r \times \cos \frac{1}{2}A}{\text{sen}\, B}$.

834 Las analogías que resuelven los casos de la Trigonometría Esférica, igualmente que las que resuelven los de la Trigonometría Plana, suponen constantes las seis partes que en todo triángulo se consideran; por consiguiente no salen cabales los resultados quando alguno de los datos de la cuestion padece algun incremento ó decremento que es preciso llevar en cuenta. Las analogías que dan el valor de estos incrementos ó decrementos se llaman *analogías diferenciales*, hacen papel en la Astronomía, particularmente en la Astronomía Física, y déxolas tratadas con bastante individualidad en el Tomo III. de mi Curso.

TABLA

Valores de los arcos de círculo en partes del radio, en el supuesto de ser el radio igual á la unidad.

1° =	0,017453	292519	943295	769236908
2	0,034906	585039	886591	538473815
3	0,052359	877559	829887	307710723
4	0,069813	170079	773183	076947631
5	0,087266	462599	716478	846184538
6	0,104719	755119	659774	615421446
7	0,122173	047639	603070	384658354
8	0,139626	340159	546366	153895261
9	0,157079	632679	489661	923132169
10	0,174532	925199	432957	692369077
11	0,191986	217719	376253	461605985
12	0,209439	510239	319549	230842892
13	0,226892	802759	262845	000079800
14	0,244346	095279	206140	769316708
15	0,261799	387799	149436	538558615
16	0,279252	680319	092732	307790523
17	0,296705	972839	036028	077027431
18	0,314159	265358	979323	846264338
19	0,331612	557878	922619	615501246
20	0,349065	850398	865915	384738154

21 =	0,366519	142918	809211	153975061
22	0,383972	435438	752506	923211969
23	0,401425	727958	695802	692448877
24	0,418879	020478	639098	461685784
25	0,436332	312998	582394	230922692
26	0,453785	605518	525690	000159600
27	0,471238	898038	468985	769396507
28	0,488692	190558	412281	538633415
29	0,506145	483078	355577	307870323
30	0,523598	775598	298873	077107231
31	0,541052	068118	242168	846344138
32	0,558505	360638	185464	615581046
33	0,575958	653158	128760	384817954
34	0,593411	945678	072056	154054861
35	0,610865	238198	015351	923291769
36	0,628318	530717	958647	692528677
37	0,645771	823237	901943	461765584
38	0,663225	115757	845239	231002492
39	0,680678	408277	788535	000239400
40	0,698131	700797	731830	769476307
41	0,715584	993317	675126	538713215
42	0,733038	285837	618422	307950123
43	0,750491	578357	561718	077187030
44	0,767944	870877	505013	846423938

45 =	0,785398	163397	448309	615660846
46	0,802851	455917	391605	384897754
47	0,820304	748437	334901	154134661
48	0,837758	040957	278196	923371569
49	0,855211	333477	221492	692608477
50	0,872664	625997	164788	461845384
51	0,890117	918517	108084	231082292
52	0,907571	211037	051380	000319200
53	0,925024	503556	994675	769556107
54	0,942477	796076	937971	538793015
55	0,959931	088596	881267	308029923
56	0,977384	381116	824563	077266830
57	0,994837	673636	767858	846503738
58	1,012290	966156	711154	615740646
59	1,029744	258676	654450	384977553
60	1,047197	551196	597746	154214461
61	1,064650	843716	541041	923451369
62	1,082104	136236	484337	692688276
63	1,099557	428756	427633	461925184
64	1,117010	721276	370929	231162092
65	1,134464	013796	314225	000399000
66	1,151917	306316	257520	769635907
67	1,169370	598836	200816	538872815
68	1,186823	891356	144112	308109723

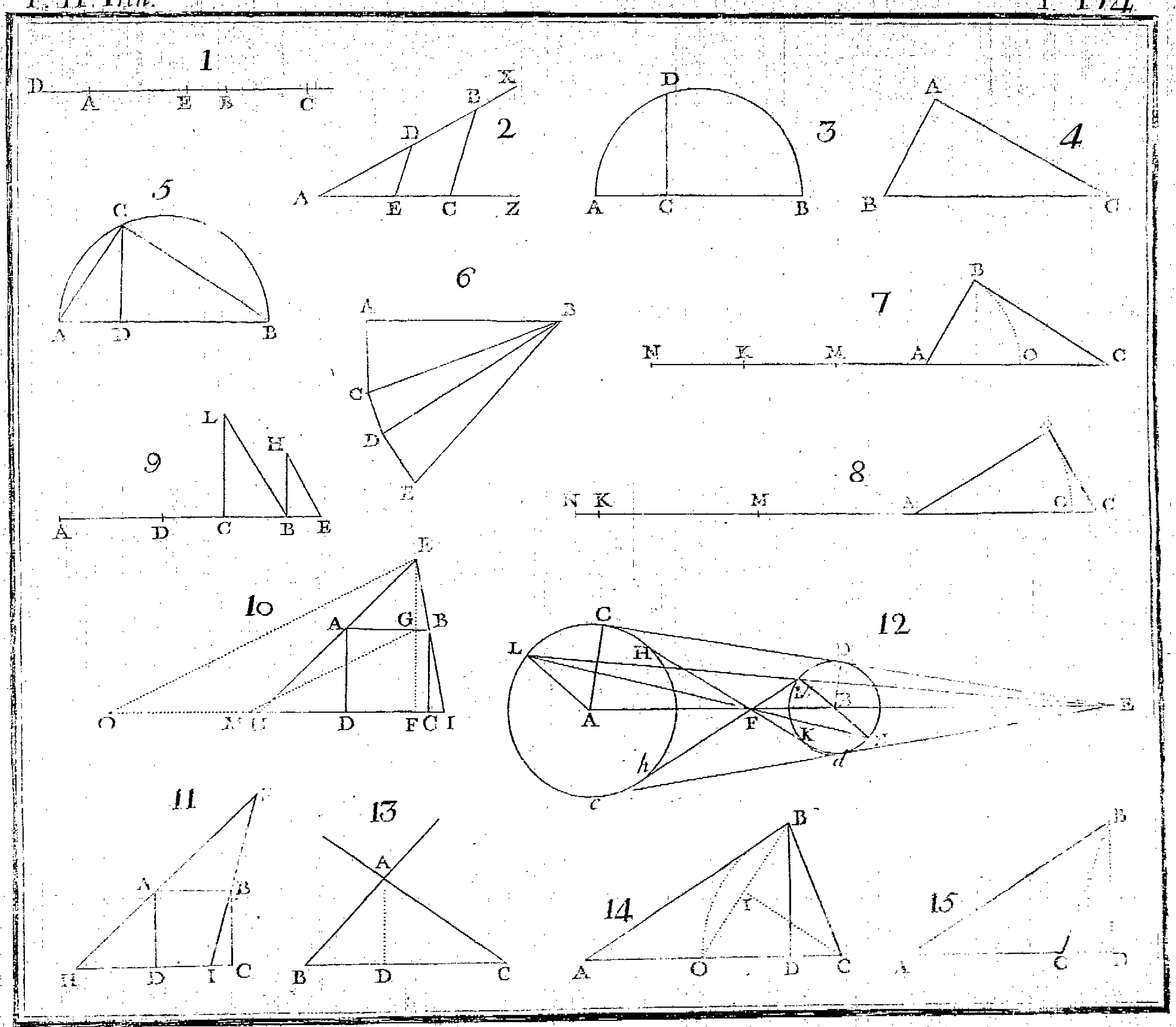
69 =	1,204277	183876	087408	077346630
70	1,221730	476396	030703	846583538
71	1,239183	768915	973999	615820446
72	1,256637	061435	917295	385057353
73	1,274090	353955	860591	154294261
74	1,291543	646475	803886	923531169
75	1,308996	938995	747182	692768076
76	1,326450	231515	690478	462004984
77	1,343903	524035	633774	231241892
78	1,361356	816555	577070	000478799
79	1,378810	109075	520365	769715707
80	1,396263	401595	463661	538952615
81	1,413716	694115	406957	308189522
82	1,431169	986635	350253	077426430
83	1,448623	279155	293548	846663338
84	1,466076	571675	236844	615900246
85	1,483529	864195	180140	385137153
86	1,500983	156715	123436	154374061
87	1,518436	449235	066731	923610969
88	1,535889	741755	010027	692847876
89	1,553343	034274	953323	462084784
90	1,570796	326794	896619	231321692
91	1,588249	619314	839915	000558599
92	1,605702	911834	783210	769795507

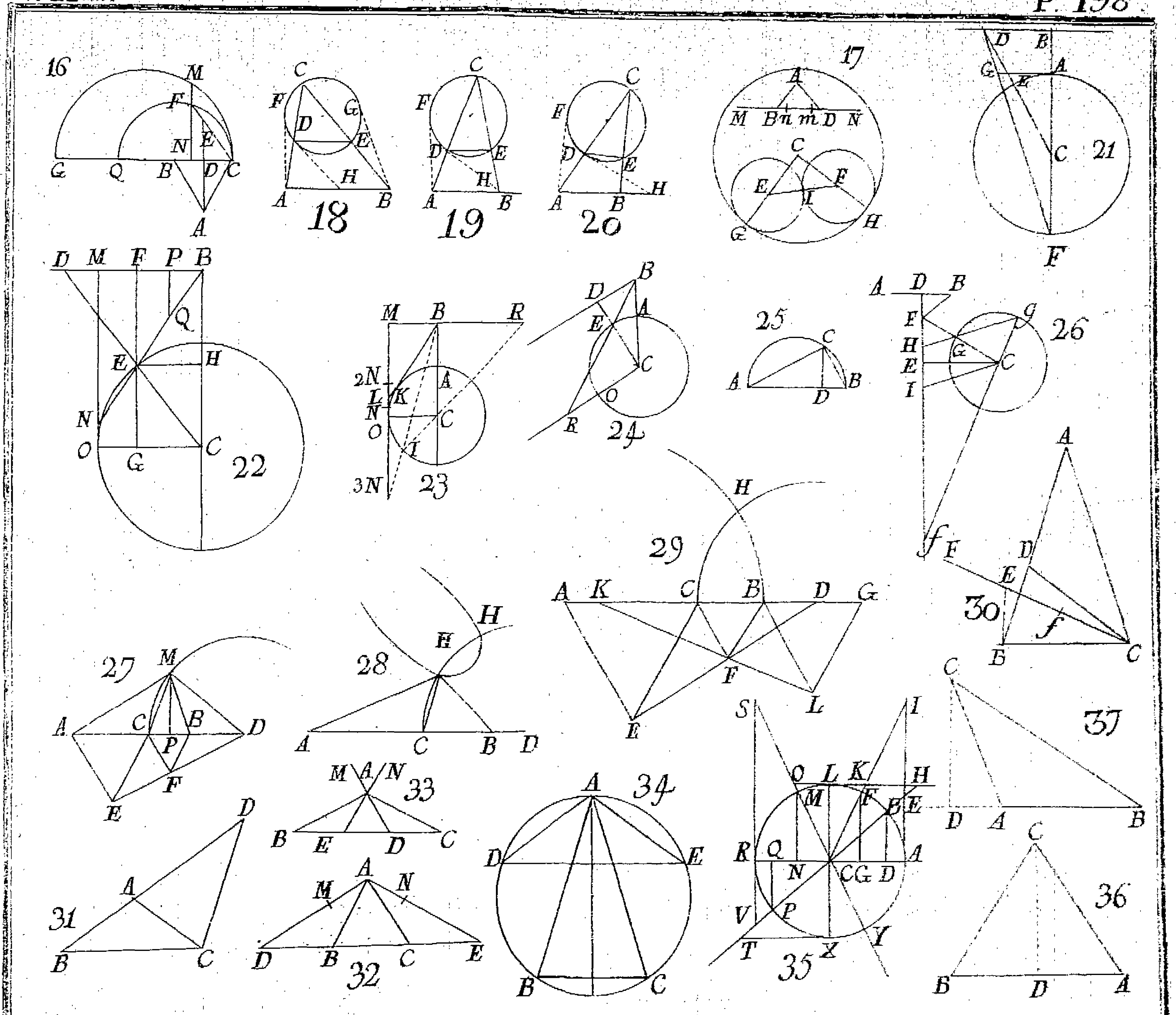
93 =	1,623156	204354	726506	539032415
94	1,640609	496874	669802	308269322
95	1,658062	789394	613098	077506230
96	1,675516	081914	556393	846743138
97	1,692969	374434	499689	615980045
98	1,710422	666954	442985	385216953
99	1,727875	959474	386281	154453861
100	1,745329	251994	329576	923690769
120	2,094395	102393	195492	308428922
150	2,617993	877991	494365	385536153
180	3,141592	653589	793238	462643383
210	3,665191	429188	092111	539750614
240	4,188790	204786	390984	616857844
270	4,712388	980384	689857	693965075
330	5,759586	531581	287603	848179536
360	6,283185	307179	586476	925286767

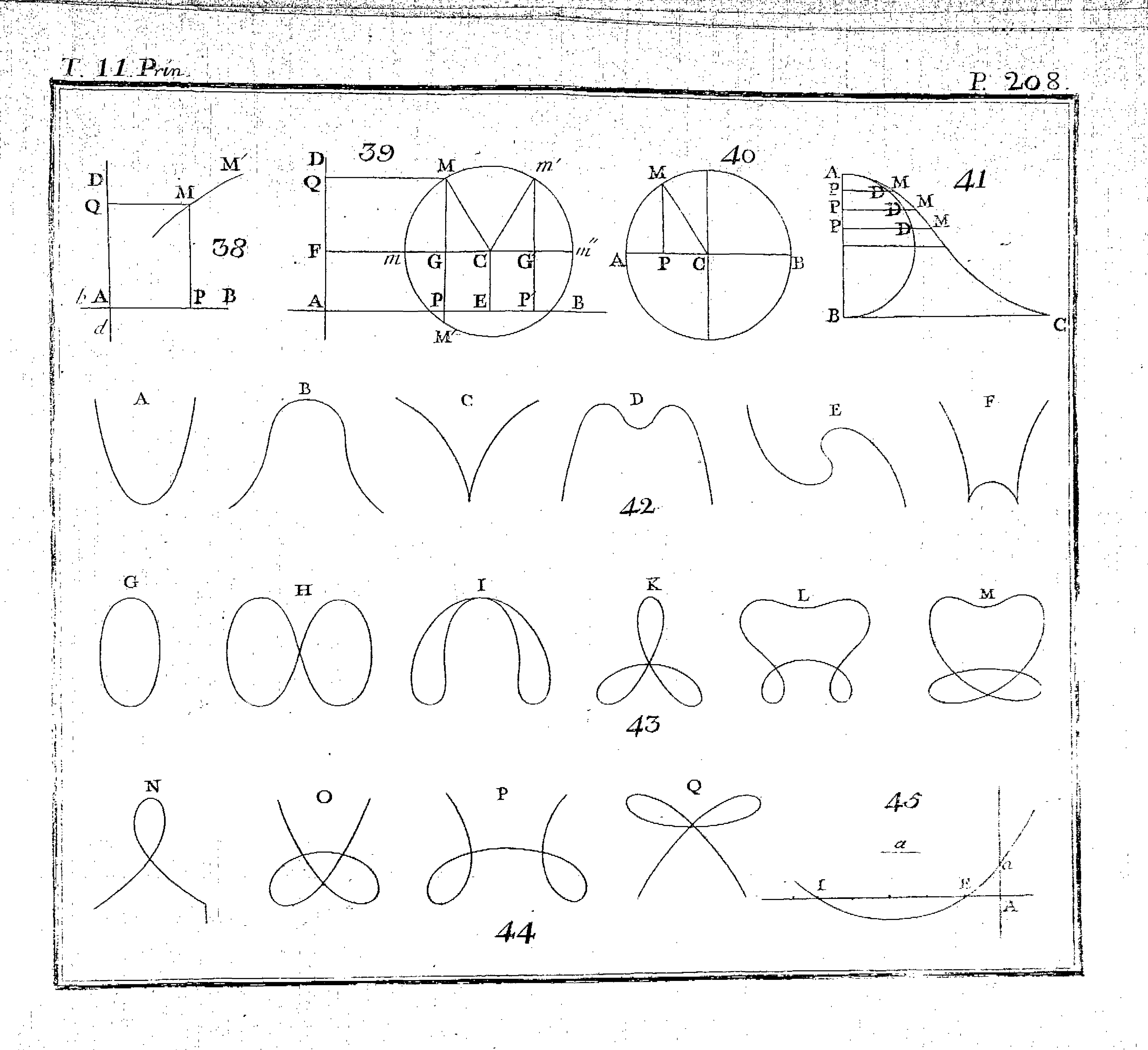
1′=	0,000290	888208	665721	596153948
2	0,000581	776417	331443	192307897
3	0,000872	664625	997164	788461845
4	0,001163	552834	662886	384615794
5	0,001454	441043	328607	980769742
6	0,001745	329251	994329	576923691
7	0,002036	217460	660051	173077639
8	0,002327	105669	325772	769231588
9	0,002617	993877	991494	365385536
10	0,002908	882086	657215	961539485
20	0,005817	764173	314431	923078969
30	0,008726	646259	971647	884618454
40	0,011635	528346	628863	846157938
50	0,014544	410433	286079	807697423
60	0,017453	292519	943295	769236908

1″=	0,000004	848136	811095	359935899
2	0,000009	696273	622190	719871798
3	0,000014	544410	433286	079807697
4	0,000019	392547	244381	439743597
5	0,000024	240684	055476	799679496
6	0,000029	088820	866572	159615395
7	0,000033	936957	677667	519551294
8	0,000038	785094	488762	879487193
9	0,000043	633231	299858	239423092
10	0,000048	481368	110953	599358991
20	0,000096	962736	221907	198717983
30	0,000145	444104	332860	798076974
40	0,000193	925472	443814	397435966
50	0,000242	406840	554767	996794957
60	0,000290	888208	665721	596153948

FIN
DEL TOMO SEGUNDO.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

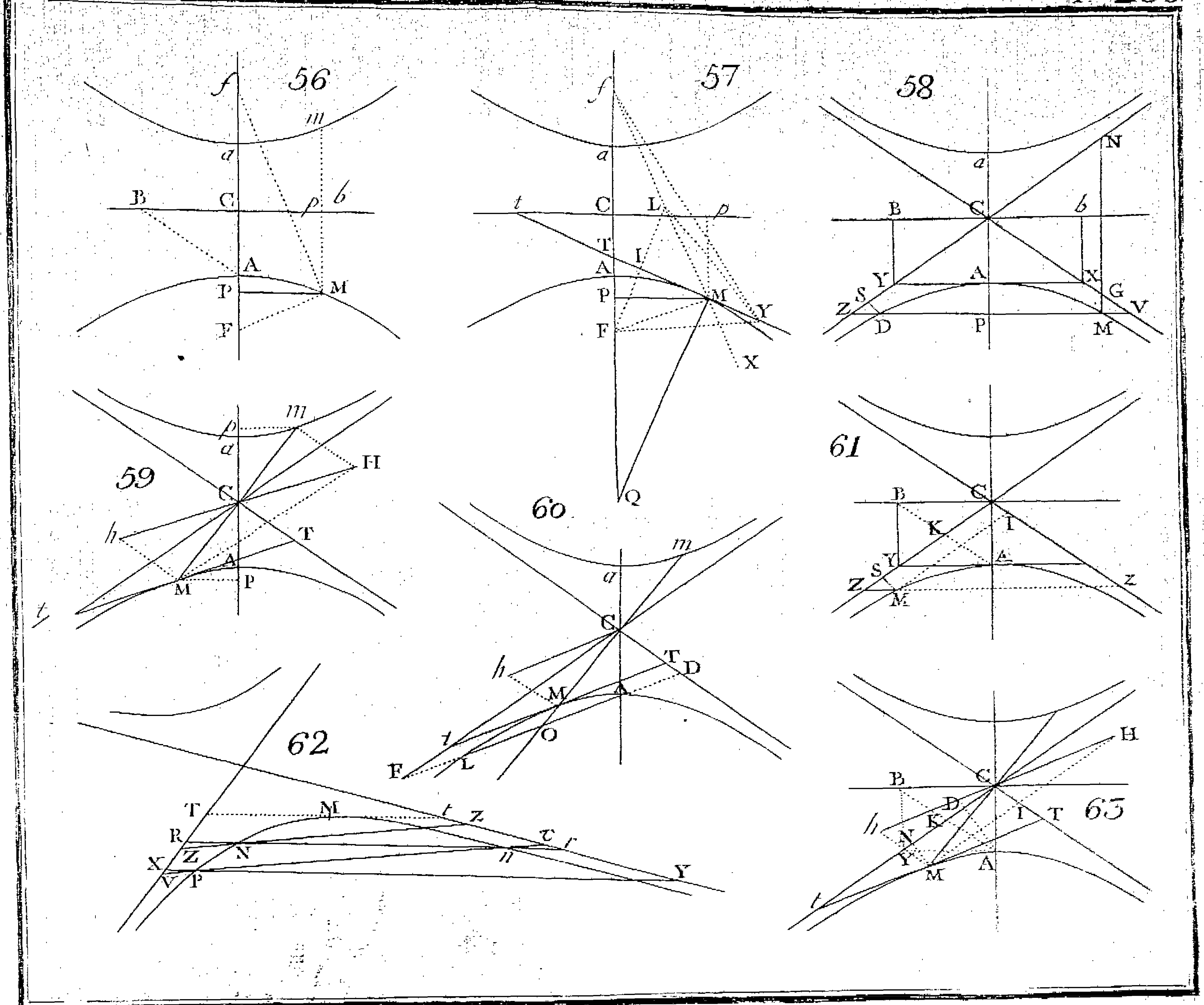

16
18
19
20
17
21
22
23
24
25
26
29
30
27
28
37
33
34
31
32
35
36

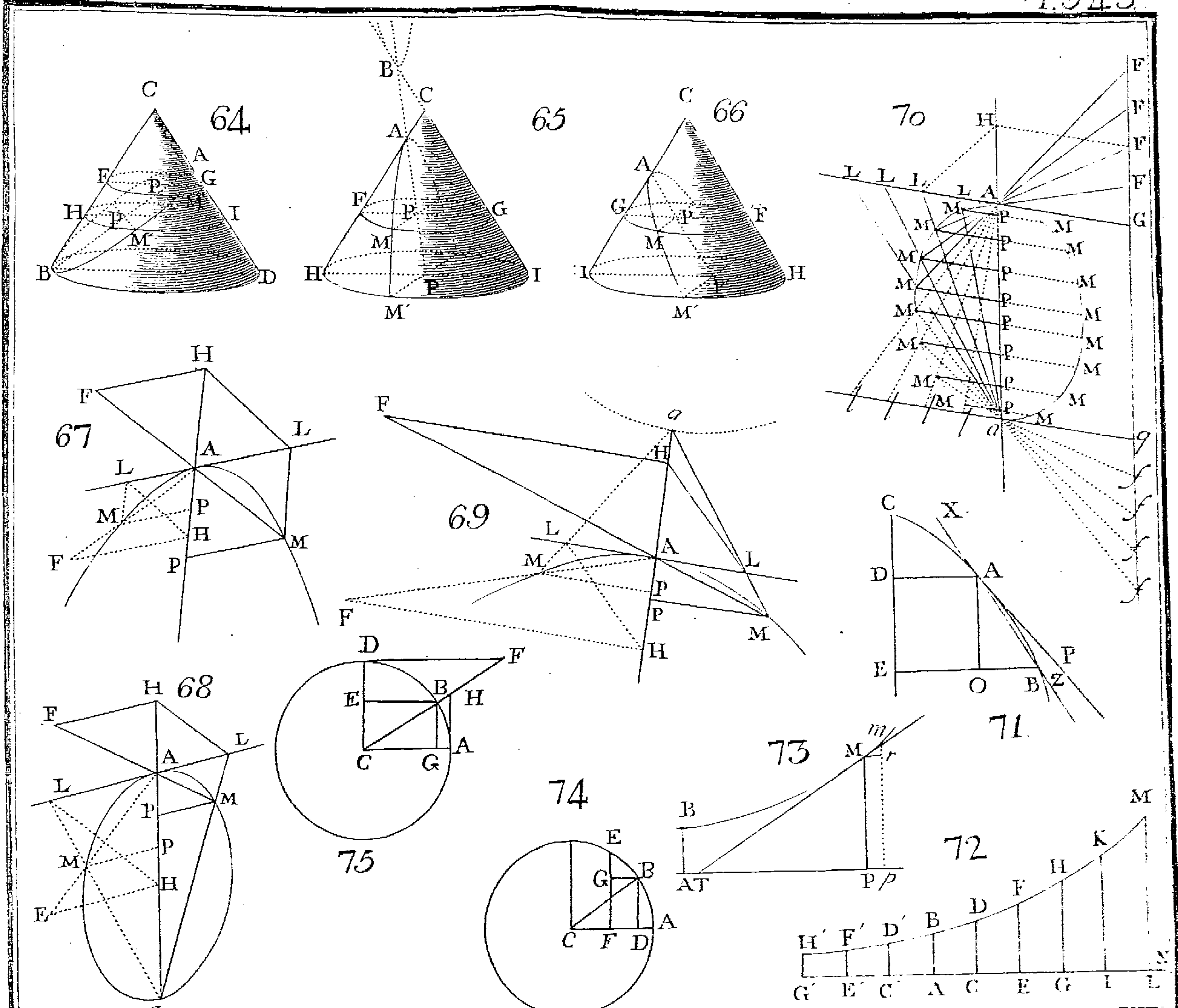

38
39
40
41
42
43
44
45
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
O
P
Q

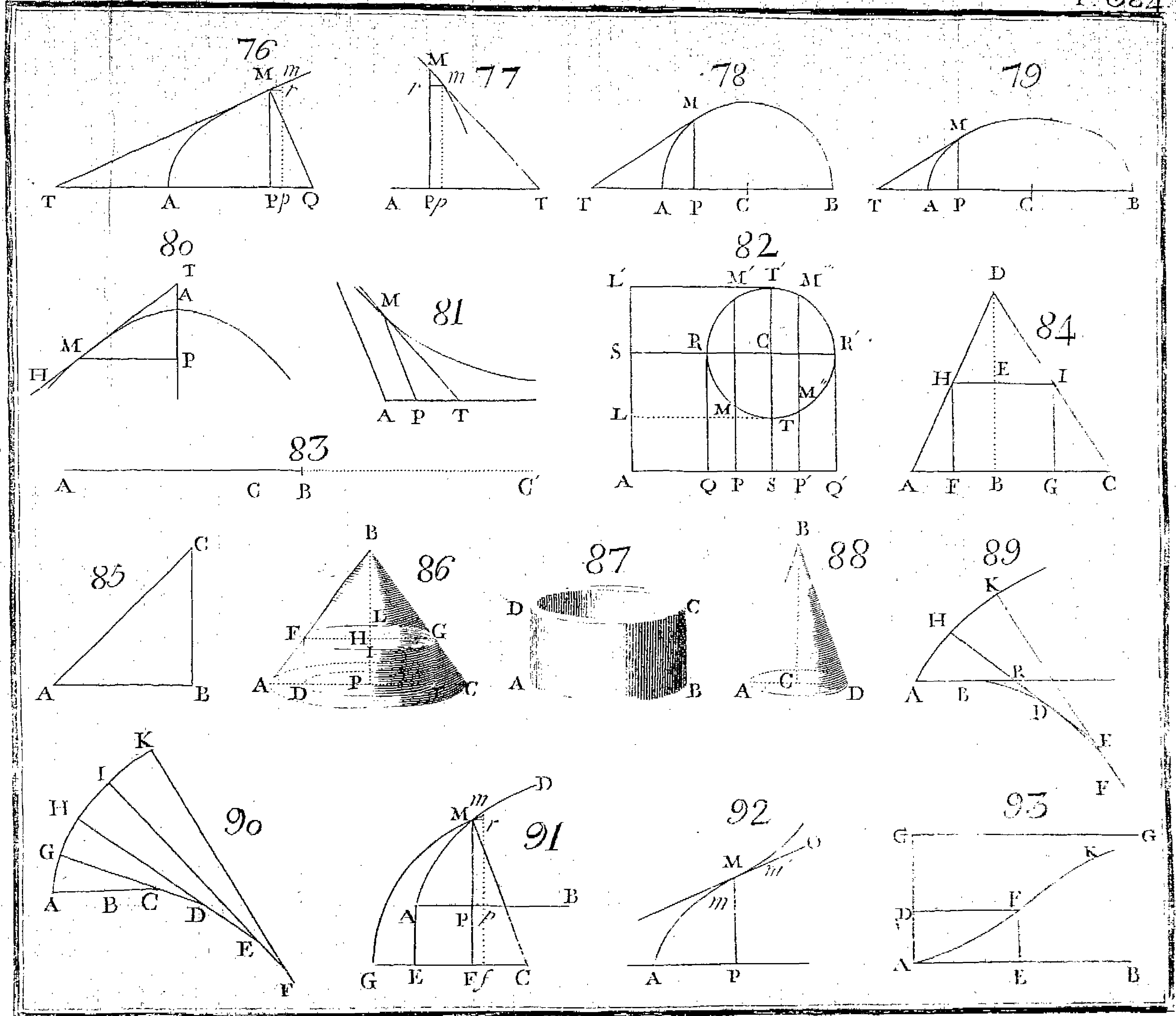
46 47 48 49

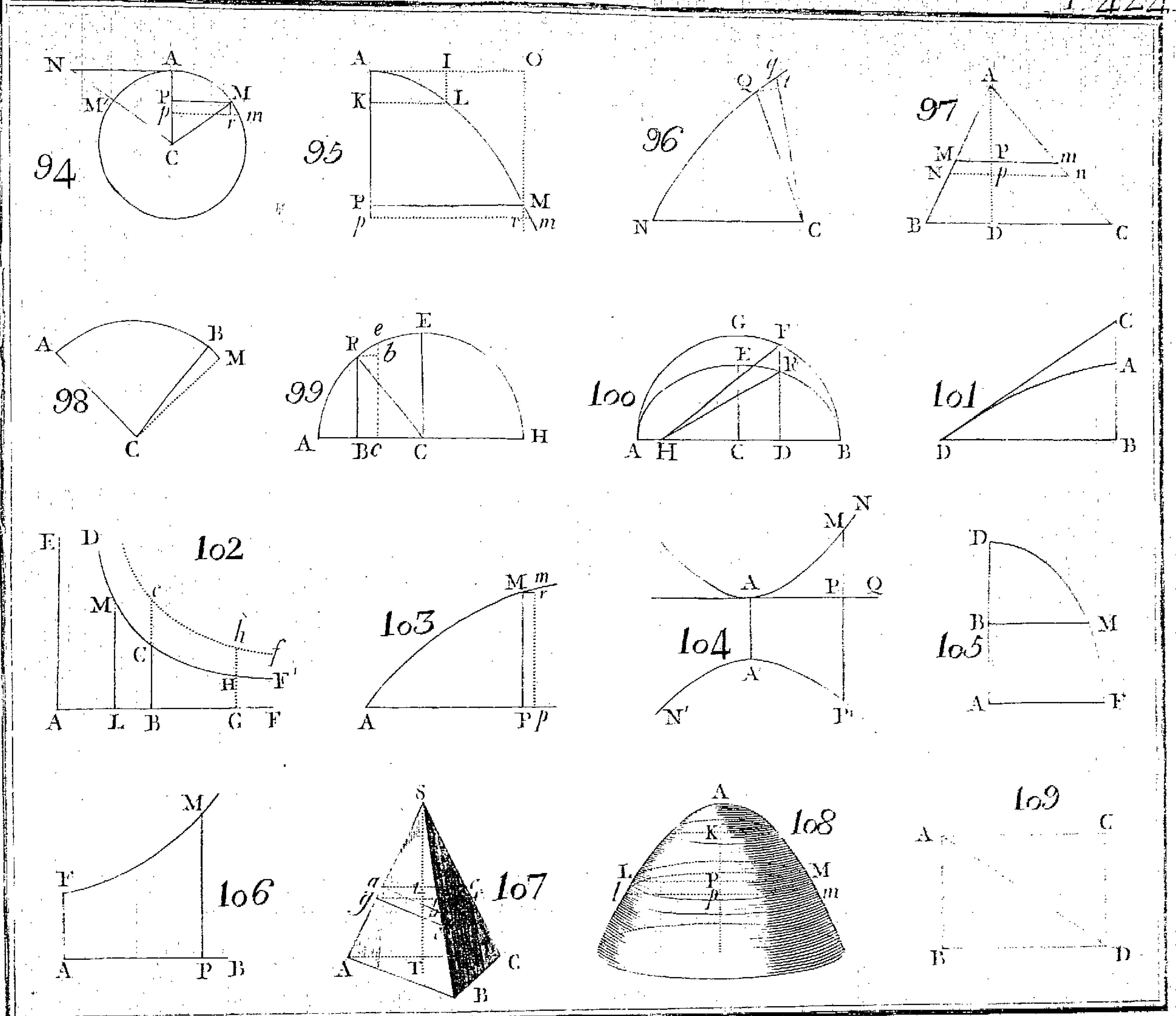
50 51 52

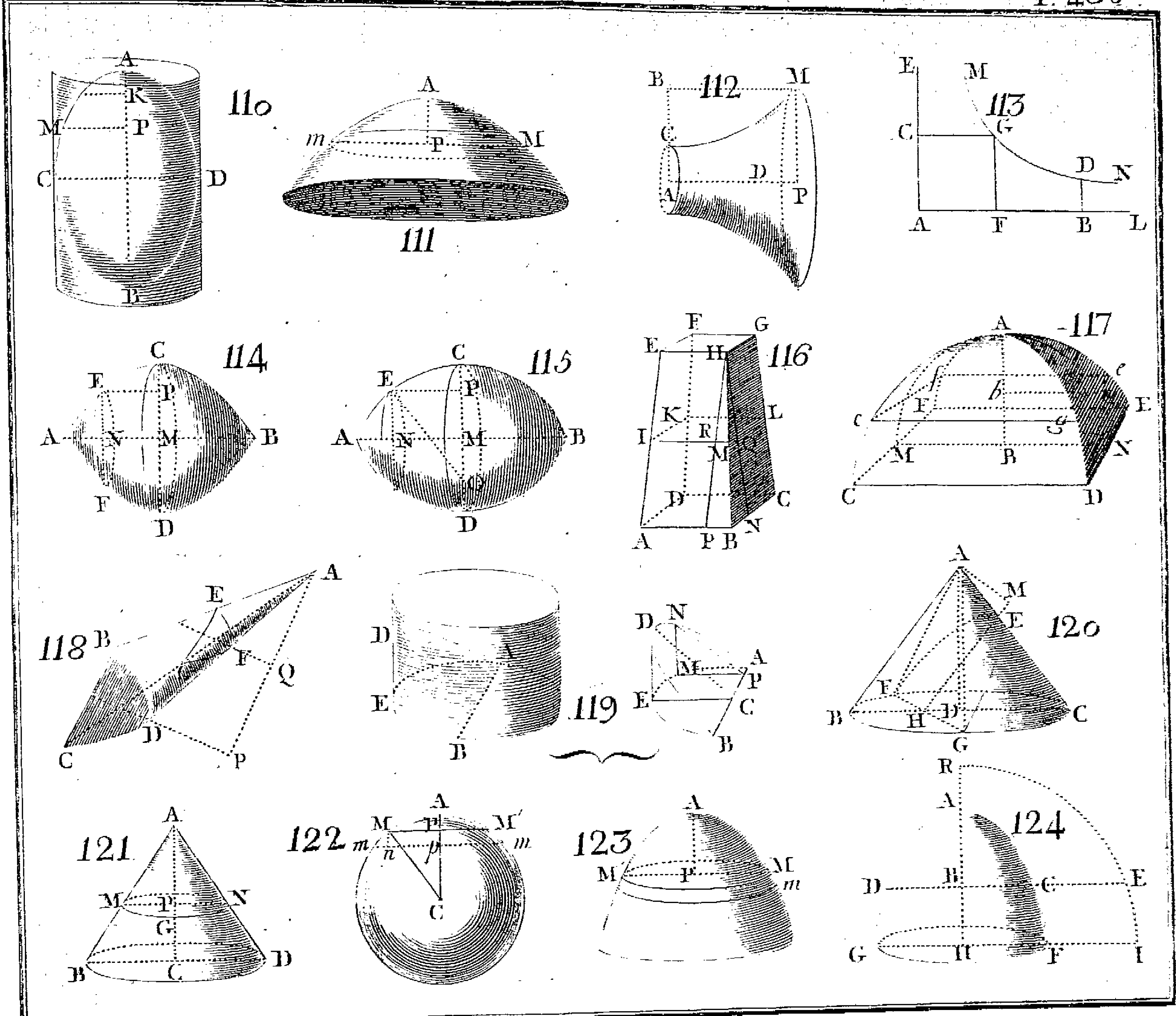
53 54 55

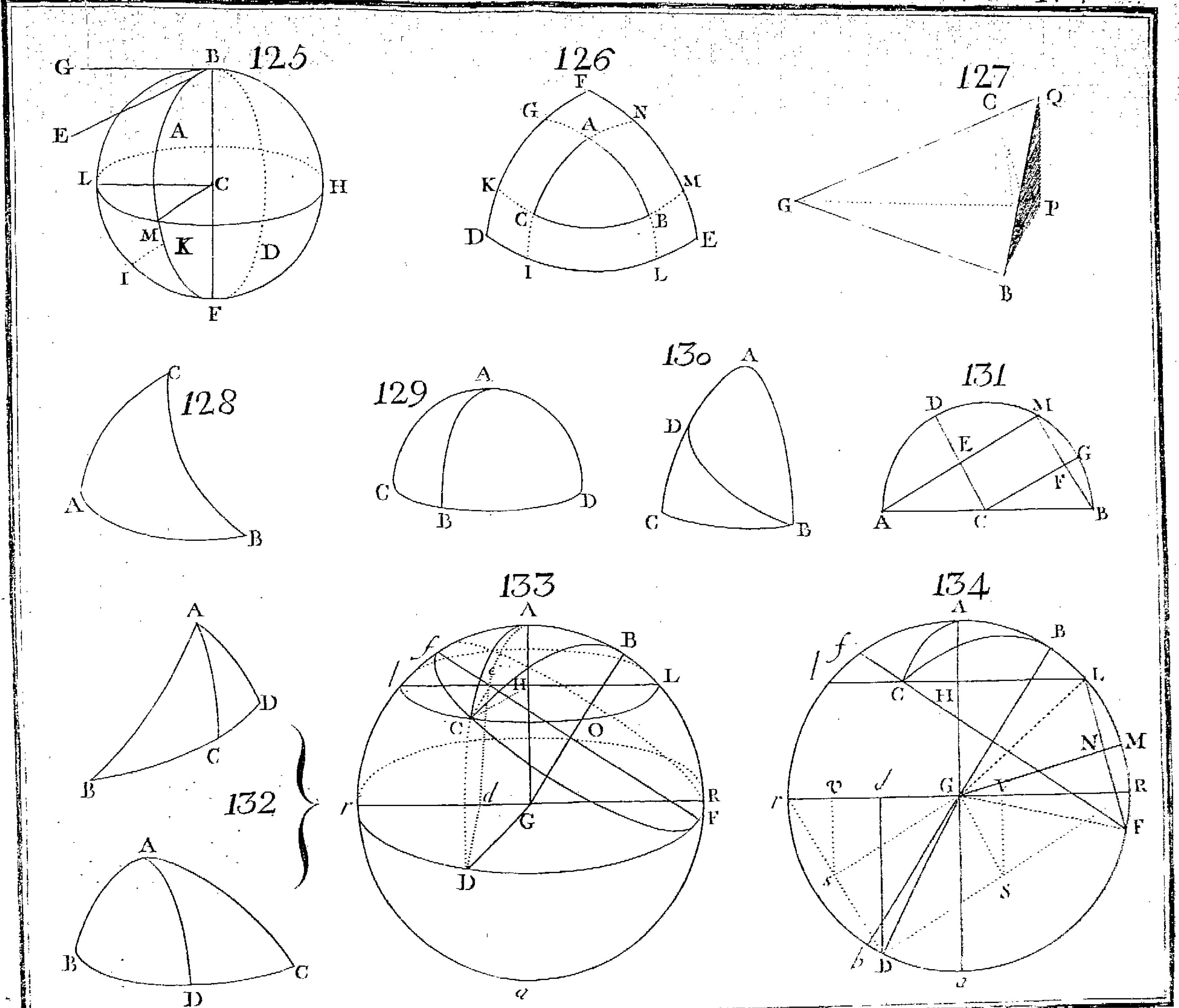

56
57
58
59
60
61
62
63


64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75


76
T
A
P p Q
M m
r
77
M m
r
A P p T
78
M
T A P C B
79
M
T A P C B
80
T
A
M
P
H
81
M
A P T
82
L′ M′ T′ M‴
S R C R′
M″
L M
T
A Q P S P′ Q′
84
D
H E I
A F B G C
83
A C B C′
85
C
A B
86
B
L
F H G
I
A D P C
87
D C
A B
88
B
A C D
89
K
H
R
A B
D
E
F
90
K
I
H
G
A B C D
E
F
91
D
M m
r
A B
P p
G E F f C
92
O
M
m′
m
A P
93
G G
K
D F
A E B


94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109


110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124


125
G B E A L C H M K I D F
126
F G N A K M C B D E I L
127
C Q G P B
128
C A B
129
A C B D
130
A D C B
131
D M E G F A C B
132
A D C B
A B D C
133
A B f l L H e C O r d G R F D a
134
A B f l L C H N M r v d G V R F s S b D a